Álgebra Linear - 2^a Avaliação - Turma A

2 de Setembro de 2019 - Prof. Armando Caputi

1 — Considere a equação $AX = B$, em que são dadas uma matriz A quadrada de ordem n e uma matriz-coluna B com n linhas. Denote por T o operador linear no $\mathbb{R}^n$ associado à matriz A (via base canônica) e por C e L, respectivamente, os subespaços gerados pelas colunas e pelas linhas de A. Diga se são verdadeiras ou falas as afirmações abaixo, justificando:

a) A equação $AX = B$ possui solução se e somente se $B \in \operatorname{Im} T$

b) Se $B \in \operatorname{Im} T$, então $det(A) \neq 0$

c) $\operatorname{Im} T = C$

d) $\ker T = L^{\perp}$

e) Se $\ker T = 0$, então a equação $AX = B$ admite infinitas soluções

2 — Seja dada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear tal que $T(1,0,1) = (1,1)$, $T(0,1,1) = (0,2)$, $T(1,1,0) = (2,0)$

a) Determine a expressão de $T(x, y, z)$

b) Determine o núcleo e a imagem de T

3 — Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$

a) Escreva a matriz A associada a T relativamente à base $B = \{(1,1,2), (-1,1,0), (-1,-1,1)\}$

b) Determine a matriz mudança de base M_B^C, da base B para a base canônica C e, em seguida, a sua adjunta

c) Utilize os resultados anteriores para achar a matriz associada a T relativamente à base C

d) Calcule T nos vetores da base C para verificar suas contas anteriores (caso detecte algum erro, somente corrija se for um erro conceitual, não de conta)

4 — Seja dado o sistema linear de EDOs (nas funções incógnitas $x(t), y(t), z(t), u(t)$)

$$\begin{cases} x' &= 2x + z \\ y' &= 2y + u \\ z' &= 12x + 3z \\ u' &= -y \end{cases}$$

a) Identifique a matriz A associada ao sistema e determine seu polinômio característico

b) Determine o polinômio mínimo da matriz A e, coom base no resultado, determine se A é diagonalizável

c) Determine os autovalores de A e seus respectivos autoespaços

d) Determine a solução geral do sistema acima

e) Determine a solução do sistema de EDOs acima tal que $(x(0), y(0), z(0), u(0)) = (1, 1, 4, 2)$