MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profs. Carla N. Lintzmayer e Guilherme O. Mota

Lista 1

Entrega: até 23h55 do dia 07/10/2018

- Submeta ao tidia um único arquivo PDF.
- Seja o mais **formal** possível em todas as respostas.
- Identifique devidamente cada exercício.
- A lista é uma forma de treino para a prova, que não terá consulta. Evite plágio!

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| \geq 2$. Prove que se $|E| \geq |V| + 1$, então G possui um vértice com grau pelo menos 3.
2. Prove que um passeio de u a v contém um caminho de u a v. Use indução no comprimento do passeio.
3. Seja G um grafo simples de ordem n cujos vértices têm graus d_1, d_2, $\ldots$, d_n. Quais são os graus dos vértices em $\bar{G}$?
4. Mostre que $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$.
5. Se G é regular então $\bar{G}$ é regular?
6. Se $uv \in E(G)$ é aresta de corte então u e v são vértices de corte?
7. Prove que se G é um grafo simples, então G ou $\bar{G}$ é conexo.
8. Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum.
9. Determine se o grafo de Petersen é bipartido e encontre o tamanho do seu maior conjunto independente.
10. Seja G um grafo simples com $g(G) = 5$. Mostre que G tem pelo menos $\delta(G)^2 + 1$ vértices.
11. Seja $G = (V, E)$ o grafo tal que $V = \{a, b, c, d\}$ e $E = \{ab, bc, ca, cd\}$. Encontre *todos* os caminhos maximais, cliques maximais e conjuntos independentes maximais de G. Encontre *todos* os caminhos máximos, cliques máximas e conjuntos independentes máximos de G.
12. É verdade que existe um grafo bipartido com $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$? Justifique sua resposta.
13. Prove que um grafo conexo G tem uma trilha Euleriana (não fechada) se e somente se G contém exatamente dois vértices de grau ímpar. Dica: para provar tanto a ida quanto a volta, adicione um novo vértice (que deve ter grau 2) a G e use o seguinte teorema visto em sala: "Um grafo G é Euleriano se e somente se todos os vértices de G têm grau par."
14. Execute o algoritmo de Fleury no grafo da Figura 1.

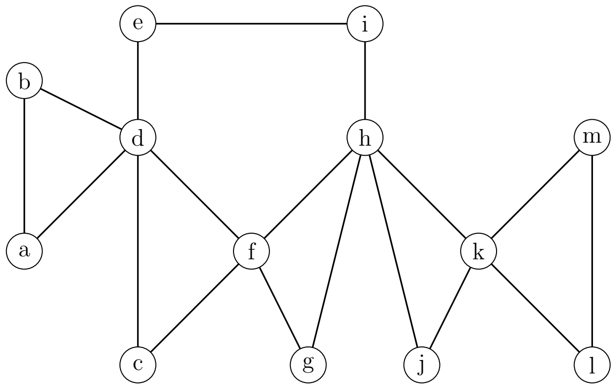

Figura 1: Grafo para o exercício.

Extras (não precisam ser entregues)

1. Prove por contradição que todo grafo G com $|V(G)| \geq 2$ tem dois vértices com mesmo grau.
2. Argumente que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ sem fazer contas.
3. Prove ou mostre um contraexemplo. Considere grafos simples:
   (a) Todo passeio fechado contém um ciclo.
   (b) Todo vértice de corte possui grau maior que 1.
4. Prove que todo conjunto de 6 pessoas tem pelo menos 3 pessoas que mutuamente se conhecem ou 3 pessoas que mutuamente não se conhecem.
5. Há um certo número de homens e 15 mulheres em um salão. Cada homem cumprimentou exatamente 6 mulheres e cada mulher cumprimentou exatamente 8 homens. Há quantos homens no salão?
6. Mostre que se G é simples de ordem n com mais de $\binom{n-1}{2}$ arestas, então G é conexo.

Fique à vontade também para procurar exercícios nos livros recomendados na bibliografia :)