MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profs. Carla N. Lintzmayer e Guilherme O. Mota

Lista 2

Entrega: até 23h55 do dia 21/10/2018

- Submeta ao tidia um único arquivo PDF.
- Seja o mais **formal** possível em todas as respostas.
- Identifique devidamente cada exercício.
- A lista é uma forma de treino para a prova, que não terá consulta. Evite plágio!

1. Dado um grafo G e uma aresta uv de G, escreva um algoritmo que verifica se uv é ponte.

2. Explique como usar a BFS para calcular a cintura de um grafo.

3. Mostre que o seguinte vale para todo grafo G com n vértices e m arestas: $m \geq n - c(G)$, onde $c(G)$ denota a quantidade de componentes conexas de G. Mostre que a igualdade vale apenas para quando G é uma floresta.

4. Indique um argumento na prova de corretude do Dijkstra que não é válido quando o grafo em questão tem arestas com peso negativo.

5. Mostre que se G é uma árvore com $\Delta(G) \geq 2$, então G tem pelo menos $\Delta(G)$ folhas.

6. Prove que toda árvore G com $|V(G)| \geq 2$ possui pelo menos dois conjuntos independentes maximais disjuntos.

7. Quantas orientações um grafo simples possui?

8. Mostre que D é fortemente conexo se e somente se para todo $S \subset V(D)$ com $S \neq \emptyset$, existe um arco xy onde $x \in S$ e $y \in V(D) \setminus S$.

9. Seja G um grafo par. Mostre que G possui uma orientação D tal que $d^+_D(v) = d^-_D(v)$ para todo $v \in V(D)$.

Extras (não precisam ser entregues)

1. Prove que o algoritmo a seguir encontra corretamente o diâmetro de uma árvore. Execute a BFS a partir de um vértice w qualquer para encontrar um vértice u que está à maior distância de w. Execute a BFS novamente, agora a partir de u, para encontrar um vértice v que está à maior distância de u. Retorne $dist(u, v)$.

2. Todo grafo euleriano bipartido possui um número par de arestas?

3. Mostre que um grafo par não possui aresta de corte.

4. Mostre que em todo grafo bipartido k-regular com bipartição (X, Y) temos $|X| = |Y|$.

5. Seja G um grafo conexo onde todos os vértices têm grau par. Prove que, para todo vértice v de $V(G)$, a quantidade de componentes de $G - v$ é no máximo $d(v)/2$.

6. Se G é conexo com $2k > 0$ vértices de grau ímpar, então G pode ser decomposto em k trilhas.

7. Se G é conexo e tem exatamente um ciclo, qual o número de árvores geradoras de G? E se G é conexo e tem exatamente dois ciclos?

8. Prove que G é uma floresta se e somente se todo subgrafo conexo é um subgrafo induzido.

9. Mostre que toda árvore possui uma folha na maior das partes da bipartição.

10. Sejam T e T' árvores geradoras de G. Para cada aresta $e \in T \setminus T'$, prove que existe uma aresta $f \in T' \setminus T$ tal que $T' - f + e$ e $T - e + f$ são geradoras.

11. Escreva um algoritmo para decidir se um grafo é bipartido.

12. Existe grafo euleriano simples com número par de vértices e ímpar de arestas?

13. Sejam d_1, d_2, $\ldots$, d_n inteiros positivos com $n \geq 2$. Prove que existe uma árvore cujos vértices têm graus d_1, d_2, $\ldots$, d_n se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Fique à vontade também para procurar exercícios nos livros recomendados na bibliografia :)