MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profs. Carla N. Lintzmayer e Guilherme O. Mota

Lista 3

Entrega: até 23h55 do dia 20/11/2018

- Submeta ao tidia um único arquivo **PDF**.
- Seja o mais **formal** possível em todas as respostas.
- Identifique devidamente cada exercício.
- A lista é uma forma de treino para a prova, que não terá consulta. Evite plágio!

1. É verdade que todo grafo k-regular tem um emparelhamento perfeito?

2. Exiba um grafo G com pelo menos 6 vértices e um emparelhamento em G que seja maximal mas não seja máximo. Argumente por que ele não é máximo.

3. Prove ou dê um contraexemplo: toda árvore possui no máximo um emparelhamento perfeito.

4. Prove o seguinte resultado, conhecido como *versão defeituosa do Teorema de Hall*: seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Se $|N(S)| \geq |S| - k$ para todo $S \subseteq X$ e algum inteiro k, então G tem um emparelhamento com $|X| - k$ arestas.

5. Para quais valores de k o grafo de Petersen é k-conexo? E k-aresta-conexo? Quais os valores de κ e κ' para ele?

6. Se G é árvore, ciclo ou o grafo completo, mostre que $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

7. Mostre que nem todo grafo 2-aresta-conexo é 2-conexo. Mostre que todo grafo 2-conexo é 2-aresta-conexo.

8. Sejam k e ℓ dois inteiros com $1 \leq k < \ell$. Dê um grafo G tal que $\kappa(G) = k$ e $\kappa(G - v) = \ell$ para algum $v \in V(G)$.

9. Mostre que se G possui caminho hamiltoniano, então para todo $S \subseteq V(G)$ temos $c(G - S) \leq |S| + 1$.

10. Prove o seguinte teorema usando a mesma ideia da prova do teorema de Dirac: se G é um grafo com $|V(G)| \geq 3$ tal que $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$ para todo par u, v de vértices não-adjacentes, então G é hamiltoniano.

Extras (não precisam ser entregues)

1. Prove que todo grafo bipartido k-regular G ($k \geq 1$) pode ser decomposto em k emparelhamentos perfeitos em G.

2. É verdade que em qualquer árvore todo emparelhamento maximal é máximo?

3. (Difícil) Mostre que $\kappa(G) \leq \kappa(G') \leq \delta(G)$ para qualquer grafo G.

4. Seja G um grafo com 4 ou mais vértices tal que $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$. Mostre que G tem um ciclo hamiltoniano.

5. Prove que se G é um grafo simples com $\delta(G) \geq (|V(G)| - 1)/2$, então G possui um caminho hamiltoniano.

6. Prove o seguinte teorema usando a mesma ideia da prova do teorema de Dirac: se G é um grafo e u, v são dois vértices não-adjacentes em G tais que $d(u)+d(v) \geq |V(G)|$, então G é hamiltoniano se e somente se $G + u, v$ é hamiltoniano.

Fique à vontade também para procurar exercícios nos livros recomendados na bibliografia :)