TEOREMA 16.3 (Vizing, 1964): Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Demonstração: Vamos provar por indução em $m = |E(G)|$ que G é $(\Delta(G)+1)$-aresta-colorível. Seja $\Delta = \Delta(G)$.

BASE: se $m=1$, claramente podemos aresta-colorir o grafo com $\Delta+1$ cores.

HIPÓTESE: Se G tem $m' < m$ arestas, então G é $(\Delta+1)$-aresta-colorível.

PASSO: Seja G com m arestas. Seja e uma aresta qualquer de G.

Por hipótese de indução, $G-e$ é $(\Delta+1)$-aresta-colorível (note que $\Delta(G-e) \leq \Delta(G)$).

Vamos mostrar que é possível atribuir uma das cores de $\{1,2,\dots,\Delta+1\}$ a e, recolorindo algumas arestas se necessário.

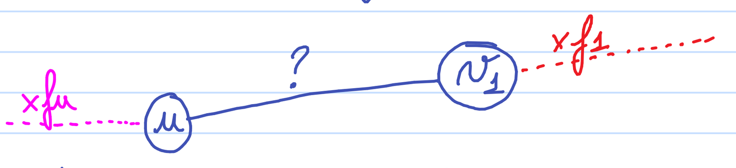
Note que qualquer vértice de $G-e$ tem grau no máximo $\Delta(G)$.

(1) Logo, todo vértice tem pelo menos uma cor disponível.

Em particular, os extremos da aresta e possuem cor disponível.

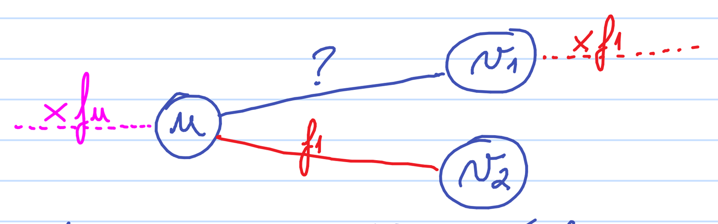
Se a cor disponível em ambos fosse a mesma, bastava atribuí-la a e para colorir G propriamente.

Então seja $e = uv_1$ com f_u sendo a cor disponível em u e f_1 a cor disponível em v_1.



Note que $f_u \neq f_1$

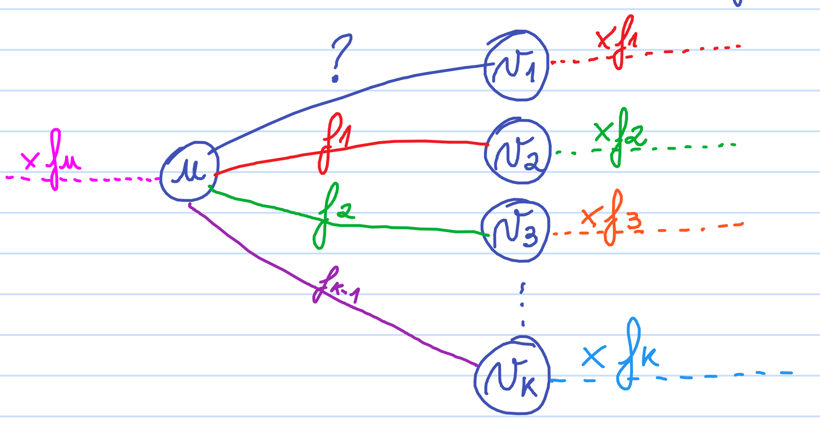
Como f_1 não está disponível para u, ela está sendo usada por outro vizinho de u, digamos v_2.



Por (1), existe uma cor disponível para v_2. Vamos chamá-la de f_2.

Vamos repetir esse processo de modo a encontrar uma sequência $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ de vértices e $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ de cores tal que

$$\begin{cases} f_i \text{ não é usada por } v_i, & 1 \leq i \leq k \\ \text{a aresta } uv_{i+1} \text{ tem cor } f_i \end{cases}$$

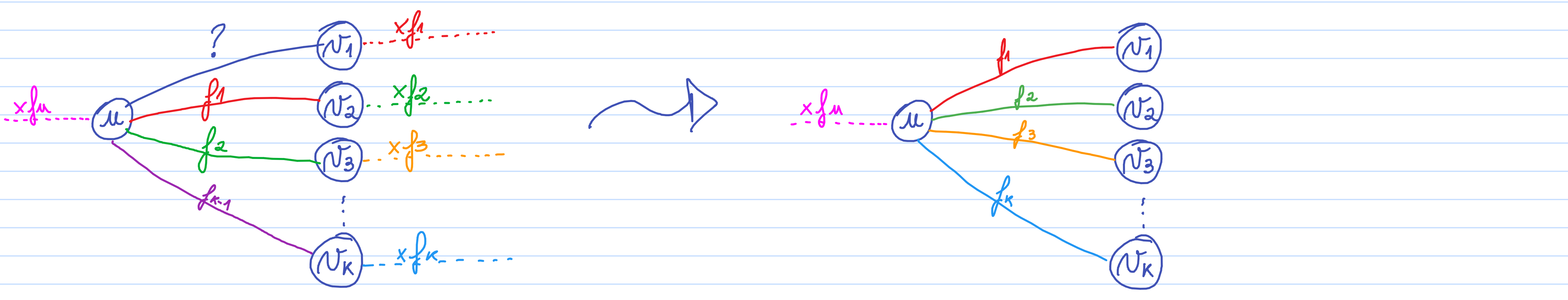


Note que como as cores $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ são usadas por u, $f_u \notin \{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}$.

Existem dois motivos para pararmos o processo descrito acima.

Primeiro, pode ser porque a cor f_k não é usada por nenhum vizinho de u.

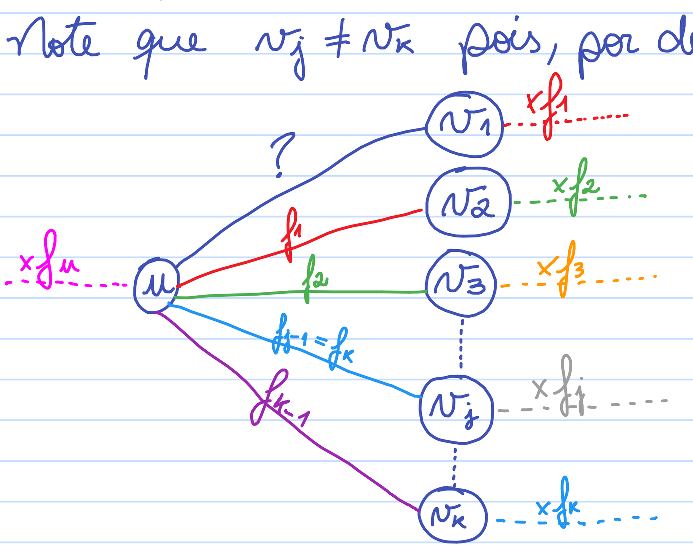
Nesse caso, podemos recolorir as arestas uv_i, $2 \leq i \leq k$, atribuindo à uv_i a cor f_i e então atribuindo à uv_1 a cor f_1. Note que isso resulta em uma $(\Delta+1)$-aresta-coloração de G.



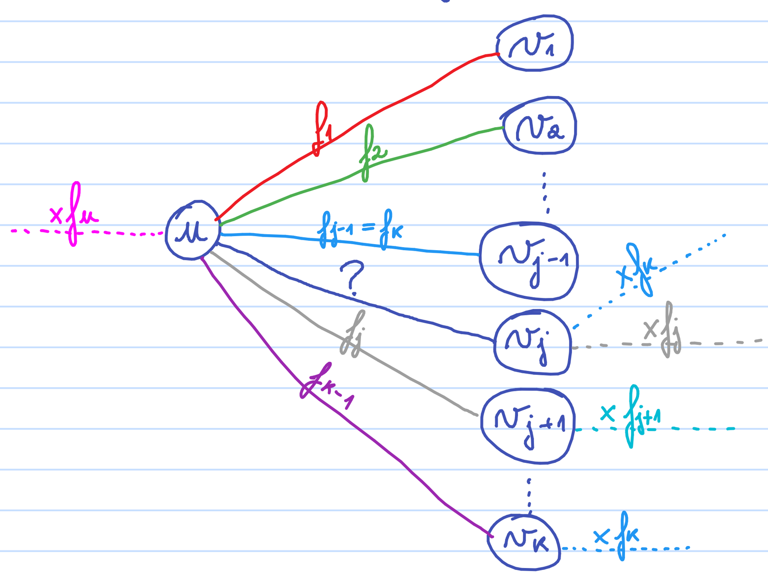
Pode ser também que o processo parou porque a cor f_k já está sendo usada em u.

Seja v_j o vizinho de u tal que $f_{j-1} = f_k$.

Note que $v_j \neq v_k$ pois, por definição da sequência, a cor f_k está livre em v_k.



Vamos recolorir as arestas uv_i, $2 \leq i < j$, atribuindo a cor f_i à uv_i, atribuindo a cor f_1 à uv_1 e deixando uv_j sem cor.



Note que agora a cor f_k está disponível para v_j.

Agora o grafo $G-uv_j$ está todo aresta-colorido com $(\Delta+1)$ cores.

Seja H o subgrafo de $G-uv_j$ induzido pelas cores f_u e f_k.

Note que H contém apenas ciclos e caminhos.

Note ainda que:

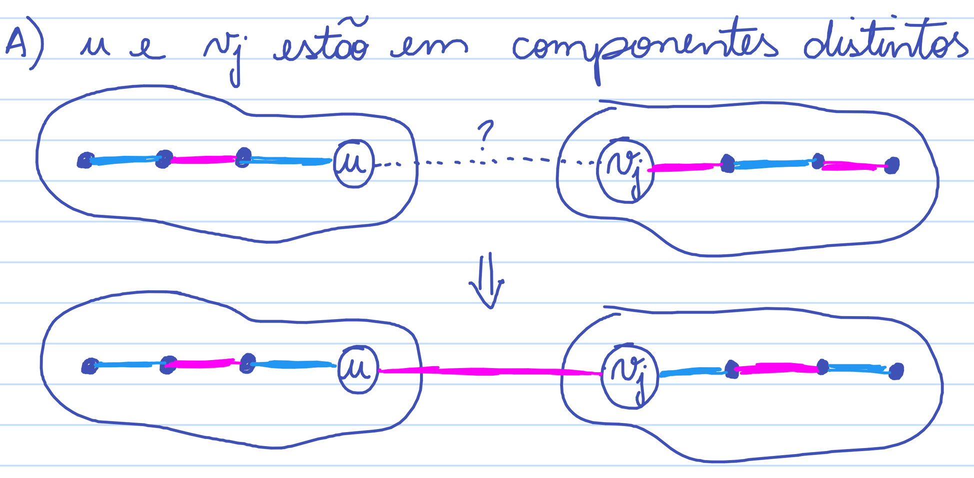
(i) $d_H(u) \leq 1$ pois a aresta uv_{j-1} pode existir e ter cor f_k e a cor f_u está livre em u;

(ii) $d_H(v_j) \leq 1$ e $d_H(v_k) \leq 1$ pois a cor f_k é livre em v_j e em v_k.

Então u, v_j e v_k não podem estar no mesmo componente em H.

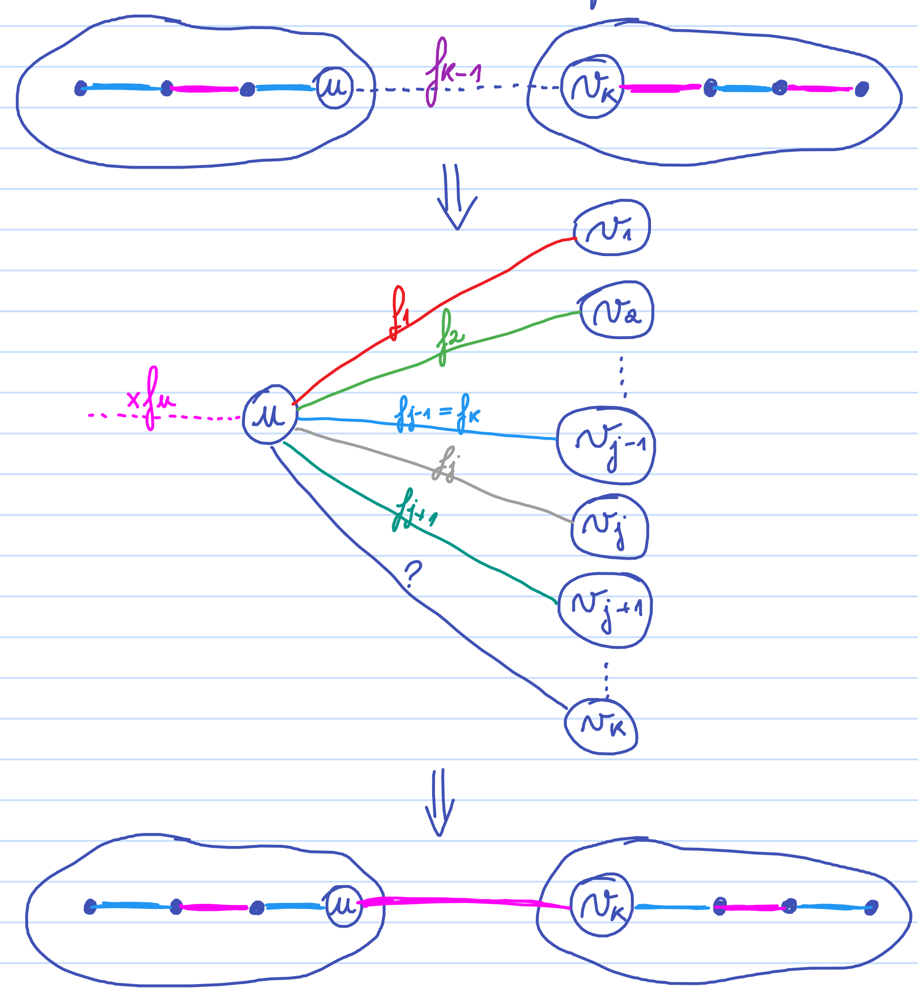
Temos então dois casos:

A) u e v_j estão em componentes distintos de H.



Neste caso, permutamos as cores f_k e f_u na componente que contém v_j e então colorimos uv_j com f_u.

B) u e v_k estão em componentes distintos de H.



Neste caso, como uv_k está colorida, recolorimos as arestas uv_i, $j \leq i < k$, atribuindo a cor f_i à uv_i e deixando uv_k sem cor.

Note que essa recoloração não envolve as cores f_u e f_k, portanto H continua o mesmo.

Então permutamos as cores f_k e f_u no componente que contém v_k e atribuímos a cor f_u a uv_k.

Logo, G é $(\Delta+1)$-aresta-colorível.

CQD