



Lista 1

Entrega: até 23h55 do dia 13/10/2019

- Submeta ao tidia um único arquivo **.pdf** com as suas soluções escaneadas dos exercícios teóricos (sugestão de aplicativo: CamScanner) e um único arquivo **.c** com as soluções dos exercícios práticos.
- Seja o mais **formal** possível em todas as respostas.
- Identifique devidamente cada exercício.
- Capriche na letra!
- A lista é uma forma de treino para a prova, que não terá consulta. Evite plágio!

1 Exercícios teóricos

1. (1 PONTO) Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V(G)| \geq 4$. Prove que se $|E(G)| \geq |V(G)| + 1$, então G possui um vértice com grau pelo menos 3.
2. (1 PONTO) Prove que um passeio de u a v contém um caminho de u a v . Use indução no comprimento do passeio.
3. (0.5 PONTO) Mostre que $\delta(G) \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$.
4. (0.5 PONTO) Prove ou dê um contraexemplo: se $uv \in E(G)$ é aresta de corte então u e v são vértices de corte.
5. (1 PONTO) O complemento \bar{G} de um grafo simples G é o grafo simples cujo conjunto de vértices é igual a $V(G)$ e cujas arestas são os pares de vértices não adjacentes de G . Prove que se G é um grafo simples, então G ou \bar{G} é conexo.
6. (1 PONTO) Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum.
7. (1 PONTO) Seja G um grafo simples com $g(G) = 5$. Mostre que G tem pelo menos $\delta(G)^2 + 1$ vértices.
8. (1 PONTO) É verdade que existe um grafo bipartido com $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$? Justifique sua resposta.
9. (1 PONTO) Prove que um grafo conexo G tem uma trilha Euleriana (não fechada) se e somente se G contém exatamente dois vértices de grau ímpar. Dica: para provar tanto a ida quanto a volta, adicione um novo vértice (que deve ter grau 2) a G e use o seguinte teorema: “Um grafo G é Euleriano se e somente se todos os vértices de G têm grau par.”

2 Exercícios práticos

1. (3 PONTOS) Implemente um arquivo `grafo.c` cujo arquivo cabeçalho¹, `grafo.h`, é o seguinte:

```
1  #ifndef __GRAFO_H
2  #define __GRAFO_H
3
4  typedef struct grafo grafo_t;
5  grafo_t* cria_grafo(int n, int m);
6  void adiciona_aresta(grafo_t *G, int u, int v);
7  void imprime_grafo(grafo_t *G);
8  void deleta_grafo(grafo_t *G);
9  int grau(grafo_t *G, int v);
10 int grau_maximo(grafo_t *G);
11 int* DFS(grafo_t *G, int s);
12 int eh_aresta_corte(grafo_t *G, int u, int v);
13
14 #endif
```

O arquivo `grafo.h` completo com explicações das funções (não modifique-o!) e outros arquivos auxiliares encontram-se em <http://professor.ufabc.edu.br/~carla.negri/cursos/materiais/implementacoes/>.

3 Exercícios extras

1. Prove ou mostre um contraexemplo: se todo vértice de um grafo simples conexo G tem grau 2, então G é um ciclo.
2. Prove que todo grafo G com $|V(G)| \geq 2$ tem dois vértices com mesmo grau.
3. Argumente que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ sem fazer contas.
4. Prove ou mostre um contraexemplo. Considere grafos simples:
 - (a) Todo passeio fechado contém um ciclo.
 - (b) Todo vértice de corte possui grau maior que 1.
5. Prove que todo conjunto de 6 pessoas tem pelo menos 3 pessoas que mutuamente se conhecem ou 3 pessoas que mutuamente não se conhecem.
6. Há um certo número de homens e 15 mulheres em um salão. Cada homem cumprimentou exatamente 6 mulheres e cada mulher cumprimentou exatamente 8 homens. Há quantos homens no salão?
7. Mostre que se G é simples de ordem n com mais de $\binom{n-1}{2}$ arestas, então G é conexo.

¹Você pode ler um pouco sobre arquivos cabeçalho aqui: http://www.ppgia.pucpr.br/~laplima/ensino/tap/contents/02_arquivosh.html