MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profs. Carla N. Lintzmayer, Guilherme O. Mota e Maycon Sambinelli

Lista 4

Entrega: até 21h00 do dia 3/12/2019

- Submeta ao tidia um único arquivo **.pdf** com as suas soluções escaneadas dos exercícios teóricos (sugestão de aplicativo: CamScanner) e um único arquivo **.c** com as soluções dos exercícios práticos.
- Seja o mais **formal** possível em todas as respostas.
- Identifique devidamente cada exercício.
- Capriche na letra!
- A lista é uma forma de treino para a prova, que não terá consulta. Evite plágio!

1 Exercícios teóricos

Seja G um grafo. $\alpha(G)$ é o tamanho do maior conjunto independente de G. $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G. $\chi(G)$ é o número cromático de G. $\chi'(G)$ é o índice cromático de G.

1. (1 ponto) Dê os valores de $\chi(G)$, $\chi'(G)$, $\alpha(G)$ e $\omega(G)$ para o grafo de Petersen, para o K_n e para o $K_{m,n}$. Justifique suas respostas em todos os casos.

2. (1 ponto) Prove que todo grafo 3-regular que possui ciclo hamiltoniano é 3-aresta-colorível.

3. (1 ponto) Prove que $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ para qualquer grafo G com n vértices.

4. (1 ponto) Mostre que se G é regular com $|V(G)|$ ímpar, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

5. (2 pontos) Defina os valores exatos de $\alpha(G)$, $\omega(G)$, $\chi(G)$ e $\chi'(G)$ para o grafo G dado na Figura 1, justificando devidamente sua resposta e apresentando um conjunto independente máximo, uma clique máxima, uma coloração nos vértices e uma coloração nas arestas.

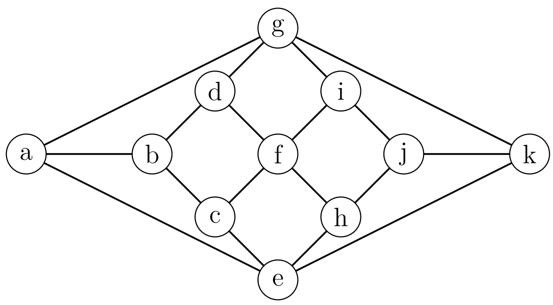

Figura 1: Grafo de Herschel, conhecido como o menor grafo formado a partir de um polígono que não tem ciclo hamiltoniano.

6. (1 ponto) Seja G com $\Delta(G) \leq 3$. Mostre que G é 4-aresta-colorível.

7. (1 ponto) Mostre que todo grafo planar tem pelo menos um vértice de grau não superior a 5. Use isso para mostrar que $\chi(G) \leq 6$ para todo grafo planar **usando indução no número de vértices**.

8. (2 pontos) Prove que se G é um grafo no qual todo vértice tem grau ímpar, então qualquer emparelhamento perfeito de G contém todas as arestas de corte de G.

2 Exercícios extras

1. Seja G um grafo tal que quaisquer 2 ciclos ímpares possuem pelo menos um vértice em comum. Mostre que $\chi(G) \leq 5$.

2. Seja H um subgrafo de G. Qual a relação entre $\chi(H)$ e $\chi(G)$?

3. Quantas arestas, no máximo, pode ter um grafo com n vértices que admite uma 3-coloração própria?

4. Mostre que $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G por indução no número de arestas.

5. Prove que se G é planar com cintura $k \geq 3$, então $|E(G)| \leq \left(\frac{k}{k-2}\right)(|V(G)| - 2)$.