Questão 2 da lista 1.
Prove que um passeio de u a v contém um caminho de u a v.

Demonstração 1: Vamos provar por indução no comprimento l (número de arestas) do passeio.

BASE: Se $l=1$, o passeio é $W=(u,v)$. Ele claramente contém o caminho $P=(u,v)$.

HIPÓTESE: Todo passeio W' de u a v de comprimento l', $1 \leq l' < l$, contém um caminho de u a v.

PASSO: Seja $W=(u,\dots,v)$ um passeio de comprimento $l>1$. Se não existem vértices repetidos, W já é caminho e o resultado vale.
Então W deve ter ao menos um vértice repetido, isto é,
$W=(u,\dots,a,x,b,\dots,c,x,d,\dots,v)$.
Tome o subpasseio de W que não tem o trecho entre os vértices repetidos:
$W'=(u,\dots,a,x,d,\dots,v)$
Como tiramos pelo menos duas arestas, o comprimento de W' é menor do que l e, claramente, W' ainda é um passeio de u a v.
Então, por hipótese, W' contém um passeio P de u a v.
Como W' está contido em W, P também está.
Logo, P é um caminho de u a v contido em W. CQD.

Demonstração 2. Por indução no comprimento do passeio.

BASE: Se $l=1$, um passeio de tamanho 1 é da forma (x,y) e ele claramente contém um caminho entre x e y, seus extremos.

HIPÓTESE: Todo passeio W' de comprimento l', $1 \leq l' < l$, contém um caminho entre os extremos de W'.

PASSO: Seja $W=(u,\dots,v)$ um passeio de comprimento $l>1$.
Como $l>1$, existe um vértice $z \neq u$ antes de v:
$W=(u,\dots,z,v)$
Remova v do passeio, gerando W':
$W'=(u,\dots,z)$
Claramente W' ainda é um passeio e tem comprimento menor que l.
Então, por hipótese, W' contém um passeio P' de u a z.
Agora note que se P' contém v $(P'=(u,\dots,v,\dots,z))$, então P' contém P, um caminho de u a v. Como P está contido em P', P' está contido em W' e W' está contido em W, então P é um caminho de u a v contido em W.
Por outro lado, se P' não contém v, então $P=P'+zv$ $(P=(u,\dots,z,v))$ é um caminho de u a v em W.
CQD

Questão 2 da lista 2.
Se G é um grafo conexo com $2k>0$ vértices de grau ímpar, então G pode ser decomposto em k trilhas.

Demonstração: Por indução em k.

BASE: Se $k=1$, então G tem dois vértices de grau ímpar. Já vimos que G possui uma trilha euleriana aberta. Então G pode ser decomposto em $k=1$ trilhas.

HIPÓTESE: Se G é conexo e tem $2k'$ vértices de grau ímpar, então G pode ser decomposto em k' trilhas.

PASSO: Seja G conexo com $2k$ vértices de grau ímpar, $k>1$.
Seja u um vértice de grau ímpar de G.
Seja T uma trilha maximal que começa em u.
Note: $T=(u,v_1,v_2,\dots,v_t)$ onde uv_1 é aresta, v_1v_2 é aresta, e assim por diante. O vértice v_t não tem vizinhos fora da trilha pois caso contrário ela não seria maximal.
Então todas as arestas incidentes a v_t estão na trilha.
Note que u tem grau ímpar em G e a trilha começa em u: então ela realmente vai usar um número ímpar de arestas incidentes a u $\therefore$ $d_T(u)$ é ímpar.
Mesmo que a trilha usasse todas as arestas incidentes a u, por ele ter grau ímpar em G, a trilha não consegue fechar em u $\therefore$ $u \neq v_t$.
Por terminar em v_t e $v_t \neq u$, $d_T(v_t)$ é ímpar.
Como usa todas as arestas de v_t, $d_G(v_t)$ é ímpar.
Todo outro vértice interno da trilha tem grau par na trilha.
Note que T termina em um vértice v que tem grau ímpar em G.
essa frase carrega tudo escrito acima
Seja $T=(u,v_1,\dots,v_x,v)$ e seja $G'=G-E(T)$.
Como $d_T(u)$ é ímpar e $d_G(u)$ é ímpar, $d_{G'}(u)$ é par.
Como $d_T(v)$ é ímpar e $d_G(v)$ é ímpar, $d_{G'}(v)$ é par.
Como $d_T(v_i)$ é par, $d_{G'}(v_i)$ tem a mesma paridade de $d_G(v_i)$, $1 \leq i \leq x$.
Assim G' tem exatamente $2(k-1)$ vértices de grau ímpar.
Sejam $G_1,\dots,G_p$ os componentes de G'.
Cada G_j é conexo e tem um número par de vértices de grau ímpar (Corolário 2) menor do que $2(k-1)$, digamos $2k_j$.
Então por hipótese cada G_j pode ser decomposto em k_j trilhas.
Todos esses e a trilha T formam uma decomposição para G.
CQD