Seja F_n o n-ésimo número da sequência de Fibonacci.
Temos $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$.
Use indução e prove que $F_n \geq 2^{0,5n}$ para todo $n \geq 6$.

BASE: Se $n = 6$, $F_6 = 8$ por definição e $2^{0,5 \cdot 6} = 2^3 = 8$.
Se $n = 7$, $F_7 = 13$ e $2^{0,5 \cdot 7} \approx 11,314$.
Logo, $F_n \geq 2^{n/2}$ no caso base.

HIPÓTESE: $F_k \geq 2^{k/2}$ para $6 \leq k < n$.

PASSO: Seja $n > 7$. Temos, por definição, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
Por hipótese, $F_{n-1} \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$ e $F_{n-2} \geq 2^{\frac{n-2}{2}}$.
Então

$$
\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
&\geq 2^{\frac{n-1}{2}} + 2^{\frac{n-2}{2}} \\
&= 2^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} + 2^{\frac{n}{2} - 1} \\
&= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \geq 2^{\frac{n}{2}} \quad \text{, pois } \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

$f(n) = n^{1/2}$ e $g(n) = n^{2/3}$

Claramente, $n^{1/2} \leq n^{2/3}$ pois $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}$ sempre.

Logo, tomando $c = 1$ e $n_0 = 1$, vale que $\boxed{n^{1/2} = O(n^{2/3}).}$

Suponha, para fins de contradição, que $n^{1/2}$ é $\Omega(n^{2/3})$.

Então existem constantes c e n_0 tais que $n^{1/2} \geq c \cdot n^{2/3}$ $\forall n \geq n_0$.

Isolando o c, temos que $c \leq \frac{n^{1/2}}{n^{2/3}} = \frac{1}{n^{1/6}}$.

mas $\frac{1}{n^{1/6}}$ tende a 0 conforme n cresce e, portanto, é uma contradição que exista c ainda menor constante.

Logo, $\boxed{n^{1/2} \neq \Omega(n^{2/3}).}$

$f(n) = \frac{n}{1000}$ e $g(n) = 50^{100}$

Suponha, para fins de contradição, que $\frac{n}{1000}$ é $O(50^{100})$.

Então existem constantes c e n_0 tais que $\frac{n}{1000} \leq c \cdot 50^{100}$ $\forall n \geq n_0$.

Isolando o c, temos que $c \geq \frac{n}{1000 \cdot 50^{100}}$.

mas $\frac{n}{1000 \cdot 50^{100}}$ tende a ∞ conforme n tende a ∞, uma contradição com c ser constante.

Logo, $\boxed{\frac{n}{1000} \neq O(50^{100})}$.

Note que $\frac{n}{1000} \geq 50^{100}$ sempre que $n \geq 1000 \cdot 50^{100}$.

Logo, tomando $c = 1$ e $n_0 = 1000 \cdot 50^{100}$, temos $\boxed{\frac{n}{1000} = \Omega(50^{100})}$

$f(n) = n^{1.01}$ e $g(n) = n \log^2 n$

Primeiro observe a seguinte tabela:

n	$n^{1.01}$	$n \log^2 n$
1	1	0
2^{100}	2^{101}	$2^{100} \cdot 100^2$
4^{100}	4^{101}	$4^{100} \cdot 200^2$

Ela pode nos levar à conclusão que $n\log^2 n$ é maior do que $n^{1.01}$, mas isso está errado!

Para n aproximadamente $2,6 \cdot 10^{669}$, $n^{1.01}$ é maior do que $n \log^2 n$ e isso não muda mais.

Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1.01}}{n\log^2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.01}}{\log^2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0{,}005 \cdot n^{0.01}}{\log n} = \lim_{n\to\infty} 0{,}00005 \cdot n^{0.01} = \infty.$$

ou seja, $n^{1.01}$ é limitante superior de $n\log^2 n$ a partir de algum valor de n.

Assim, $\boxed{n^{1.01} = \Omega(n \log^2 n)}$ e $\boxed{n^{1.01} \neq O(n\log^2 n)}$.

$f(n) = \log \sqrt{n}$ e $g(n) = \log(100n)$

Note que

$$\log\sqrt{n} = \log n^{1/2} = \frac{1}{2}\log n \leq \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log 100 = \frac{1}{2}(\log 100n)$$

Então, tomando $c = \frac{1}{2}$ e $n_0 = 1$, temos que $\boxed{\log\sqrt{n} = O(\log(100n))}$.

Além disso,

$$\log\sqrt{n} = \frac{1}{2}\log n = \frac{1}{4}\log n + \frac{1}{4}\log n \underset{\hookrightarrow \text{ se } n \geq 100}{\geq} \frac{1}{4}\log n + \frac{1}{4}\log 100 = \frac{1}{4}(\log 100n).$$

Então, tomando $c = \frac{1}{4}$ e $n_0 = 100$, temos que $\boxed{\log\sqrt{n} = \Omega(\log(100n))}$.

Portanto, $\boxed{\log\sqrt{n} = \Theta(\log(100n))}$.