Propriedades de Linguagens Regulares

MCTA015-13 - Linguagens Formais e Autômata

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/∼carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

UFABC

Operações regulares

Sejam A e B linguagens.

São operações regulares:

- **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
- **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e } x_i \in A\}$

Operações regulares

Considere $L = \{1, 01, 010\}$ e $M = \{\varepsilon, 11\}$.

$$L \cup M = \{\varepsilon, 1, 01, 11, 010\}$$

$$LM = \{1, 111, 01, 0111, 010, 01011\}$$

$$ML = \{1, 01, 010, 111, 1101, 11010\}$$

$$L^* = \{\varepsilon, 1, 11, 101, 010, 0101, 1010, 11101010, \ldots\}$$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$
7. $(L^*)^* = L^*$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$
7. $(L^*)^* = L^*$
8. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$

Propriedades das operações regulares

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$
7. $(L^*)^* = L^*$
8. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
9. $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$

Propriedades de fechamento de linguagens regulares

- Em geral, uma coleção de objetos é *fechada sob* alguma operação se, aplicando-se essa operação a membros da coleção, recebe-se um objeto ainda na coleção.
  - Por exemplo, números naturais são fechados sob a operação de soma.
  - Por exemplo, números naturais não são fechados sob a operação de divisão.
- As linguagens regulares são fechadas sob as três operações regulares (veja os teoremas a seguir).
  - Também são fechadas sob interseção, complemento, diferença e reverso (exercício).

Propriedades de fechamento de linguagens regulares

União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares.

União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs M_1 e M_2 que as reconhecem, respectivamente.

União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs M_1 e M_2 que as reconhecem, respectivamente.
Sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Construa $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

□

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs M_1 e M_2 que as reconhecem, respectivamente.
Sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Construa $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

$\square$

Resta mostrar que $L(M) = A_1 \cup A_2$. $\square$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.
Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

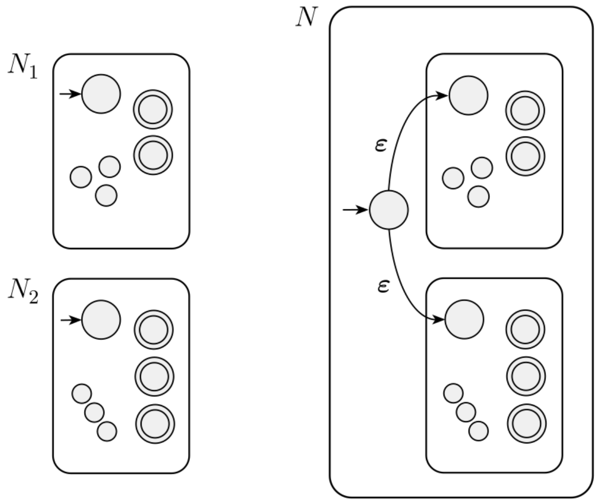
- $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
- Para $q \in Q$ e $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- $F = F_1 \cup F_2$

Note que $L(N) = A_1 \cup A_2$ porque ... □

União - Outra demonstração



Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.
Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

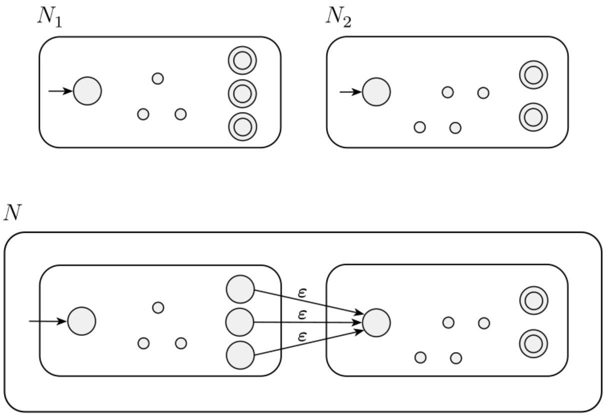
- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- Para $q \in Q$ e $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

- $q_0 = q_1$
- $F = F_2$

Note que $L(N) = A_1 A_2$ porque ... □

Concatenação



Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Demonstração.

Sejam A uma linguagem regular. Por definição, existe um AFN N que a reconhece.

Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Demonstração.

Sejam A uma linguagem regular. Por definição, existe um AFN N que a reconhece. Sejam $N = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$. Construa $N' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1$
- Para $q \in Q$ e $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_1\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- $F = \{q_0\} \cup F_1$

Note que $L(N') = A^*$ porque ... $\square$

Estrela