

Lista 0: Revisão

1 Expressões matemáticas

1. Simplifique as expressões:

(a) $\frac{2}{x+3} + \frac{-4}{5}$

(c) $\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}$
 a

(e) $\frac{(x^2)^3 y^8}{x^5 (y^4)^3}$

(b) $\frac{1}{y} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right)$

(d) $y^4 (y^2 (y^5)^2)^3$

(f) $\left(\frac{(x^2 y^{-5})^{-4}}{(x^5 y^{-2})^{-3}} \right)^2$

2. Verdadeiro ou falso:

(a) Se $a < b$ e $c < d$, então $c - b < d - a$.

(b) Se $a < b$ e $c < d$, então $ac < bd$.

(c) Se $a < b$ e $b > 0$, então $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$.

3. Avalie as seguintes expressões, sem utilizar calculadora ou computador:

(a) $25^{3/2}$

(f) $\log_2 8^{3.1}$

(b) $32^{-4/5}$

(g) $\log_8 2^{6.3}$

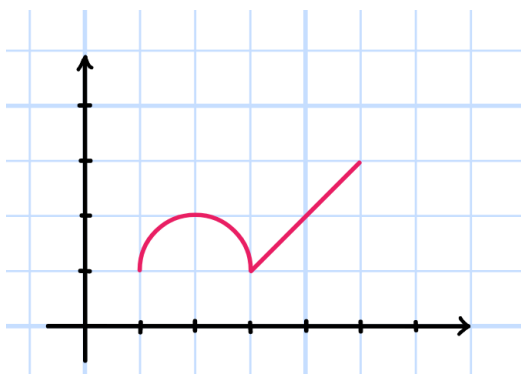
(c) $(-8)^{7/3}$

(d) $\log_2 1024$

(h) $\log_4 \frac{u^2}{\sqrt{v}}$, sabendo que $\log_4 u = 3.2$ e $\log_4 v = 1.3$

(e) $\log_4 8$

4. Seja f uma função cujo domínio é o intervalo $[1, 5]$, cuja imagem é o intervalo $[1, 3]$, e cujo gráfico é dado na figura abaixo.



Esboce o gráfico das seguintes funções g , também com domínio $[1, 5]$:

(a) $g(x) = f(x) - 5$

(b) $g(x) = 2f(x)$

(c) $g(x) = (f(x))^2$

A ideia desse exercício é perceber como fica o formato da função quando fazemos alguma operação simples sobre ela.

5. Seja $r(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}$, $s(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ e $t(x) = \frac{5}{4x^3+3}$. Escreva:

- (a) $(r + s)(x)$ (b) $(4r - 5t)(x)$ (c) $(st)(x)$ (d) $(r(x))^{2t}(x)$

6. Explique:

- (a) Por que $x^{m+n+p} = x^m x^n x^p$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $m, n, p \in \mathbb{Z}^+$?
 (b) Por que $x^m y^m z^m = (xyz)^m$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$?
 (c) Por que $\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$?
 (d) Por que $\log_3 100$ está entre 4 e 5?
 (e) Por que $\log_{40} 3$ está entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$?
 (f) Por que $\log_{2b} y = \frac{\log_b y}{1 + \log_b 2}$?
 (g) Por que $2 - \log_{10} x = \log_{10} \frac{100}{x}$ para todo $x > 0$?
 (h) Por que $\frac{4 + \log_2 x}{3} = \log_2 \sqrt[3]{16x}$ para todo $x > 0$?

7. Se m e n são inteiros positivos tais que $\log_{10} m \approx 41.3$ e $\log_{10} n \approx 12.8$, quantos dígitos mn tem?

8. Avalie:

- (a) $\sum_{i=7}^n i$ (c) $\sum_{i=1}^{40} \frac{3}{2^i}$ (e) $\sum_{k=0}^{40} (\log_2 4^k + 1)$
 (b) $\sum_{k=10}^t (3k - 2)$ (d) $\sum_{x=3}^{77} (-5)^x$ (f) $\sum_{j=0}^{\log_3 n - 1} 2^j \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^j n}$

9. Por definição, uma função f é dita *de crescimento exponencial* se ela é da forma $f(x) = ab^{kx}$, onde a e k são constantes positivas e $b > 1$. Explique por que toda função f de crescimento exponencial pode ser representada por uma fórmula da forma $f(x) = c \cdot 2^{tx}$, para escolhas apropriadas de c e t .

2 Indução

1. Mostre que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$$

para todo $n > 1$.

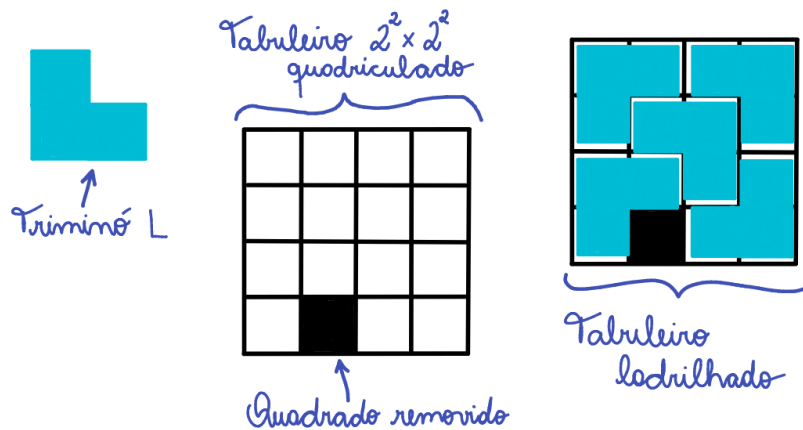
2. Prove que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ para todo $n \geq 1$.

3. Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

4. Prove que $2^{n+1} < 3^n$ para $n \geq 2$.

5. Prove que para todo $n \geq 2$, n é um número primo ou é um produto de números primos.

6. Prove que todo tabuleiro de damas quadriculado de tamanho $2^n \times 2^n$ que tem um quadrado removido pode ser ladrilhado por trininós em forma de “L”, conforme a figura a seguir.



3 Programação

1. Nesse exercício, um número inteiro x com n dígitos será representado em um vetor com n posições, uma para cada dígito, de forma invertida. Assim, por exemplo, o número 38549 é representado pelo vetor $A = (9, 4, 5, 8, 3)$.

Considere o problema de adicionar dois inteiros de n dígitos cada. Perceba que o número resultante da soma pode ter $n + 1$ dígitos.

Faça um algoritmo que recebe dois vetores A e B que representam dois inteiros e devolve um vetor C que representa a soma dos inteiros recebidos.

2. O que será impresso pela chamada `IMPRIMIR(6)`?

```

1: Função IMPRIMIR( $i$ )
2:   Se  $i > 0$  então
3:     IMPRIMIR( $i - 1$ )
4:     Para  $j = 1$  até  $i$  faça
5:       imprime "*" na tela
6:     imprime uma quebra de linha

```

3. Seja S um vetor. O que o algoritmo a seguir faz?

```

1: Função CATIORO( $S, i, j$ )
2:   Se  $i \geq j$  então
3:     Devolve sim
4:   Se  $S[i] == S[j]$  então
5:     Devolve CATIORO( $S, i + 1, j - 1$ )
6:   Devolve não

```

4. Escreva um algoritmo recursivo que devolva o elemento de maior valor contido em um vetor de n elementos.

5. Prove que o seguinte algoritmo troca os valores das variáveis x e y .

```

1: Função TROCA?( $x, y$ )
2:    $x \leftarrow x + y$ 
3:    $y \leftarrow x - y$ 
4:    $x \leftarrow x - y$ 

```