



**Lista 6:** Complexidade computacional

**ATENÇÃO!**

A definição dos problemas citados nas questões está na página seguinte.

1. Defina formalmente: algoritmo eficiente, problema de decisão, problema de otimização, certificado positivo, algoritmo verificador, classes P, NP, NP-completo e NP-difícil.
2. Defina formalmente a classe NP e a classe NP-completo. Informalmente, o que significa dizer que um problema é NP-completo?
3. É verdade que se reduzirmos um problema em P para um problema em NP, então  $P = NP$ ? Justifique.
4. Seja  $A$  um problema NP-completo. Seja  $B$  um outro problema qualquer. Diga tudo que podemos concluir ao reduzir  $A$  para  $B$ . Diga tudo que podemos concluir ao reduzir  $B$  para  $A$ .
5. Mostre que o problema SAT está em NP.
6. Seja  $G$  um grafo. Uma *coloração* de  $G$  é uma função  $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , para algum inteiro  $k \geq 1$ , tal que  $c(u) \neq c(v)$  para toda aresta  $uv \in E(G)$ . Ela recebe esse nome pois pode ser visualizada como uma atribuição de cores aos vértices (cada inteiro entre 1 e  $k$  é uma cor). Uma *3-coloração* é uma coloração em que  $k = 3$ . Considere o problema da 3-coloração: dado um grafo  $G$ , determinar se ele tem ou não uma 3-coloração. Mostre que o problema da 3-coloração está em NP.
7. Dado um grafo  $G$  com pesos nas arestas, prove que determinar se existe uma árvore geradora com peso no máximo  $k$  está em NP.
8. O problema CAMK consiste em, dado um grafo  $G$ , uma função  $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  e um número real  $k$ , decidir se existe um caminho em  $G$  de custo total no máximo  $k$ . O problema CAM consiste em, dado um grafo  $G$ , uma função  $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  e um vértice  $s$ , encontrar o menor caminho entre  $s$  e qualquer outro  $v \in V(G)$ . Mostre como reduzir o problema CAMK para o problema CAM. O que pode ser concluído sobre CAMK?
9. Mostre que se o TSPK pode ser resolvido em tempo polinomial, então o TSP também pode.
10. Mostre que o problema SET COVER é NP-completo usando o problema VERTEX COVER, que é NP-completo.
11. Mostre que o problema INDEPENDENT SET é NP-completo usando o problema VERTEX COVER, que é NP-completo.

12. Sejam  $A$  e  $B$  dois problemas na classe P,  $C$  um problema na classe NP e  $D$  e  $E$  dois problemas na classe NP-completo. Verdadeiro ou falso: se existe algoritmo com tempo  $\Theta(n^2)$  que resolve  $B$  e  $A$  pode ser reduzido para  $B$  em tempo polinomial, então não existe algoritmo com tempo  $\Theta(n)$  que resolve  $A$ . Justifique.
13. Mostre como utilizar **qualquer algoritmo** para o problema do Alinhamento de Sequências para resolver o problema da Subsequência Comum mais Longa (LCS). No LCS são dadas duas sequências  $A$  e  $B$  de tamanhos diferentes sobre um mesmo alfabeto, e queremos encontrar o tamanho da subsequência mais longa que é comum a ambas. Uma *subsequência* consiste de caracteres que aparecem na mesma ordem relativa, mas não necessariamente de forma contínua. Por exemplo, a LCS entre  $A = abcdgh$  e  $B = aedfhr$  é  $adh$  e a LCS entre  $A = aggtab$  e  $B = gxtxayb$  é  $gtab$ .

PROBLEMA: TSP

ENTRADA: grafo  $G$ , função  $c$  de custo nas arestas.

OBJETIVO: ciclo hamiltoniano (que passa por todos os vértices) cuja soma dos custos das arestas é mínima.

PROBLEMA: TSPK

ENTRADA: grafo  $G$ , função  $c$  de custo nas arestas, valor  $k$ .

DECISÃO: existe ciclo hamiltoniano cuja soma dos custos das arestas menor ou igual a  $k$ ?

PROBLEMA: SET COVER

ENTRADA: conjunto  $T = \{u_1, \dots, u_n\}$  de  $n$  elementos, coleção  $S_1, \dots, S_m$  de subconjuntos de  $T$  ( $S_i \subseteq T$  para todo  $i$ ), inteiro  $k$ .

DECISÃO: existem no máximo  $k$  conjuntos  $S_i$  tal que a união deles é  $T$ ?

PROBLEMA: VERTEX COVER

ENTRADA: grafo  $G$  e inteiro  $\ell$ .

DECISÃO: existe subconjunto de vértices  $S \subseteq V(G)$  tal que  $|S| \leq \ell$  e para toda aresta  $uv \in E(G)$  vale que pelo menos um dentre  $u$  e  $v$  estão em  $S$ ?

PROBLEMA: INDEPENDENT SET

ENTRADA: grafo  $G$  e inteiro  $z$ .

DECISÃO: existe subconjunto de vértices  $S \subseteq V(G)$  tal que  $|S| \geq z$  e para todo par  $u, v \in S$  vale que  $uv \notin E(G)$ ?

PROBLEMA: SAT

ENTRADA: uma fórmula  $\phi$  que é a conjunção de  $m$  cláusulas  $C_i$ , com cada cláusula sendo uma disjunção de literais, e cada literal sendo uma variável ou sua negação, tirada do conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de variáveis. Em outras palavras,  $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$  e  $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_{k_i}$ , para  $1 \leq i \leq m$ , e  $\ell_j \in \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ , para  $1 \leq j \leq k_i$ .

# 1 Questões retiradas do Enade e Poscomp

## QUESTÃO 22

Considere o processo de fabricação de um produto siderúrgico que necessita passar por  $n$  tratamentos térmicos e químicos para ficar pronto. Cada uma das  $n$  etapas de tratamento é realizada uma única vez na mesma caldeira. Além do custo próprio de cada etapa do tratamento, existe o custo de se passar de uma etapa para outra, uma vez que, dependendo da sequência escolhida, pode ser necessário alterar a temperatura da caldeira e limpá-la para evitar a reação entre os produtos químicos utilizados. Assuma que o processo de fabricação inicia e termina com a caldeira limpa. Deseja-se projetar um algoritmo para indicar a sequência de tratamentos que possibilite fabricar o produto com o menor custo total. Nessa situação, conclui-se que

- A** a solução do problema é obtida em tempo de ordem  $O(n \log n)$ , utilizando-se um algoritmo ótimo de ordenação.
- B** uma heurística para a solução do problema de coloração de grafos solucionará o problema em tempo polinomial.
- C** o problema se reduz a encontrar a árvore geradora mínima para o conjunto de etapas do processo, requerendo tempo de ordem polinomial para ser solucionado.
- D** a utilização do algoritmo de Dijkstra para se determinar o caminho de custo mínimo entre o estado inicial e o final soluciona o problema em tempo polinomial.
- E** qualquer algoritmo conhecido para a solução do problema descrito possui ordem de complexidade de tempo não-polinomial, uma vez que o problema do caixeiro viajante se reduz a ele.

### QUESTÃO 30

Uma fazenda possui um único poço artesiano que deve abastecer  $n$  bebedouros para o gado. Deseja-se determinar um projeto de ligação entre esses  $n+1$  pontos através de encanamentos com a menor extensão total. Um algoritmo proposto para a solução do problema executa os seguintes passos:

1. Crie  $n+1$  conjuntos unitários, cada um contendo um dos pontos a serem ligados entre si e insira esses conjuntos em um conjunto  $C$ .
2. Crie um conjunto  $D$  contendo um registro para cada combinação possível de dois pontos distintos a serem ligados. Cada registro deve conter os campos  $c_i$ ,  $c_j$  e  $d$ , em que  $c_i$  e  $c_j$  são os dois pontos a serem ligados e  $d$  é a distância entre eles.
3. Enquanto  $D$  não estiver vazio faça:
  - 3.1. Remova o registro de  $D$  com o menor valor de distância  $d$ .
  - 3.2. Se os valores de  $c_i$  e  $c_j$  do registro removido pertencerem a conjuntos distintos de  $C$ , então:
    - 3.2.1. Substitua estes dois conjuntos pela união entre eles.
    - 3.2.2. Guarde o registro removido em um conjunto-solução.

Com base na descrição do problema e do algoritmo proposto, conclui-se que

- A** o problema exemplifica a obtenção de uma árvore geradora mínima, portanto está no conjunto  $P$ .
- B** o algoritmo é uma heurística para o Problema do Caixeiro Viajante, logo apresenta complexidade polinomial.
- C** o problema descrito é de otimização, logo pertence ao conjunto  $NP$ -difícil, mas não ao conjunto  $NP$ -completo.
- D** uma alternativa para a solução do problema é usar o algoritmo de Dijkstra para obtenção do caminho mínimo entre dois pontos.
- E** o passo de maior custo do algoritmo é a criação do conjunto  $D$  com as combinações de pontos, apresentando complexidade computacional  $O(n!)$ .

### QUESTÃO 28

Um cientista afirma ter encontrado uma redução polinomial de um problema NP-Completo para um problema pertencente à classe P. Considerando que esta afirmação tem implicações importantes no que diz respeito à complexidade computacional, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

I. A descoberta do cientista implica  $P = NP$ .

#### PORQUE

II. A descoberta do cientista implica na existência de algoritmos polinomiais para todos os problemas NP-Completos.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

- A As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.
- B As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.
- C A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.
- D A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
- E As asserções I e II são proposições falsas.

**QUESTÃO 40** – Considere as seguintes afirmações sobre classes de problemas:

I. O problema de decisão CAM, descrito a seguir, pertence à classe de complexidade P.

*CAM (caminho em grafo)*

*Entrada: uma tripla  $(G,a,b)$  em que*

- $G$  é um grafo
- $a$  e  $b$  são nodos de  $G$

*Pergunta: Existe caminho em  $G$  iniciando em  $a$  e terminando em  $b$ ?*

II. Um problema  $X$  pertence à classe de problemas NP-completos quando satisfaz às seguintes condições:

- $X$  pertence à classe NP, e
- todo problema  $Y$  da classe NP pode ser reduzido em tempo polinomial a  $X$ .

III. Se um problema de decisão  $X$  pertence à classe P, então o complemento do problema  $X$  (problema com as mesmas instâncias que  $X$ , porém com as respectivas respostas invertidas) pertence à classe NP.

Quais estão corretas?

- A) Apenas I.
- B) Apenas III.
- C) Apenas I e II.
- D) Apenas II e III.
- E) I, II e III.