13) O LEMA DO BOMBEAMENTO PARA LLCs

O lema do bombeamento para LLCs

→ É um resultado que afirma que todas as LLCs têm uma propriedade especial.

→ Então se uma dada linguagem não tem essa propriedade, ela não é livre de contexto.

→ Infelizmente, se a linguagem tem a propriedade, não significa que ela é livre de contexto.
↳ Só se prova que uma linguagem é LLC mostrando uma GLC ou um AP para ela!

O lema do bombeamento para LLCs

LEMA: Se L é uma linguagem livre de contexto, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$ em que

(1) $\beta\lambda \neq \varepsilon$

(2) $|\beta\gamma\lambda| \leq p$

(3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L$.

LEMA: Se L é uma linguagem livre de contexto, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$ em que

(1) $\beta\lambda \neq \varepsilon$

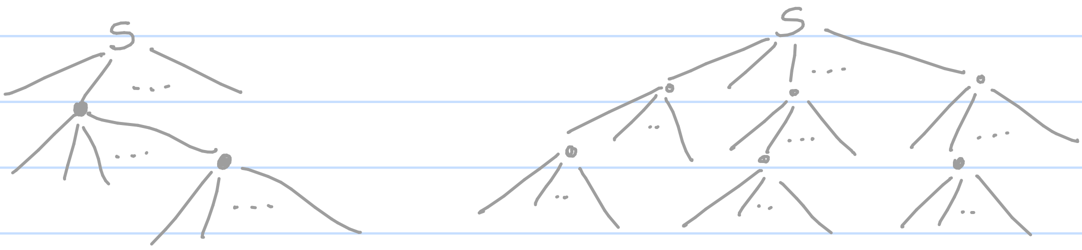
(2) $|\beta\gamma\lambda| \leq p$

(3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L$.

DEMONSTRAÇÃO (LEMA DO BOMBEAMENTO): Seja L uma linguagem livre de contexto. Seja $G = (V, \Sigma, R, S)$ uma GLC que gera L.

Seja b a maior quantidade de símbolos do lado direito de uma regra, i.e, $b = \max\{|\rho| : X \to \rho \in R\}$.

Então em qualquer árvore sintática, todo nó tem no máximo b filhos.



Logo, no máximo b^i folhas estão na altura i.

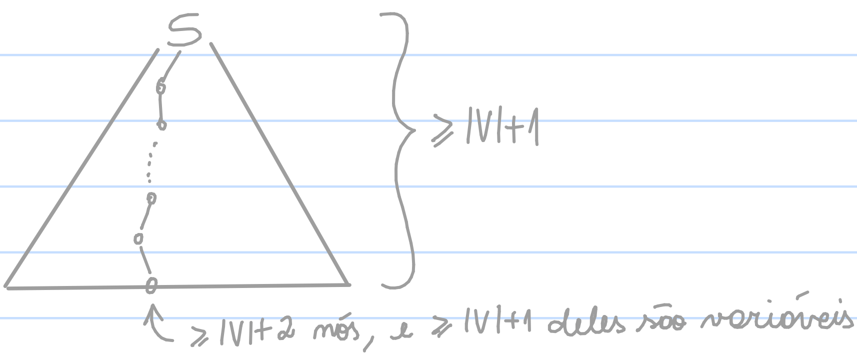
Assim, se a altura de uma árvore é h, então o comprimento da cadeia gerada é no máximo b^h.

Se uma cadeia w gerada tem $|w| \geq b^h + 1$, então qualquer árvore sintática que a gere tem altura pelo menos $h+1$.

Seja $p = b^{|V|+1}$ e seja $w \in L$ com $|w| \geq p$.

Então qualquer árvore sintática para w tem altura pelo menos $|V|+1$, pois $b^{|V|+1} > b^{|V|} + 1$.

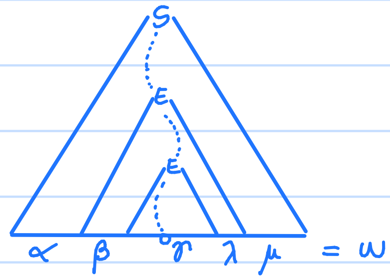
Em particular, isso vale para a árvore com menor número de nós que gera w.



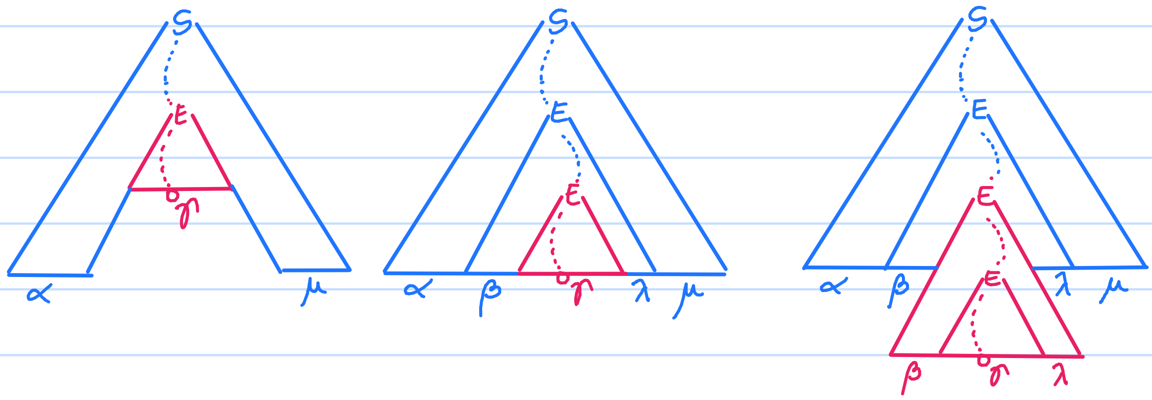
Então, o maior caminho da raiz até uma folha tem pelo menos $|V|+2$ nós, dos quais pelo menos $|V|+1$ são variáveis.
Pelo princípio da casa dos pombos, alguma variável se repete nesse caminho.

Seja E uma variável que se repete entre as últimas $|V|+1$ variáveis desse caminho.

Divida w como na figura:



A ocorrência mais alta de E gera $\beta\gamma\lambda$ e a mais baixa gera γ.
Como ambas são geradas pela mesma variável, podemos substituir uma pela outra e ainda obter árvores sintáticas válidas.



Por isso, cadeias do tipo $\alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L$, para $k \geq 0$.
Note que $\beta\lambda \neq \varepsilon$, pois caso contrário a árvore sintática da esquerda no desenho acima geraria w, mas já escolhemos a menor árvore possível.
Por fim, como a ocorrência de E que gera $\beta\gamma\lambda$ está entre as $|V|+1$ últimas do caminho a partir de S, tal subárvore tem altura no máximo $|V|+1$ e, portanto, só pode gerar cadeias de comprimento no máximo $b^{|V|+1} = p$. Logo, $|\beta\gamma\lambda| \leq p$.

CQD