LEMA: Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$

(2) $|\alpha\beta| \leq p$

(3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

DEMONSTRAÇÃO (LEMA DO BOMBEAMENTO): Seja L uma linguagem regular.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que a reconhece.

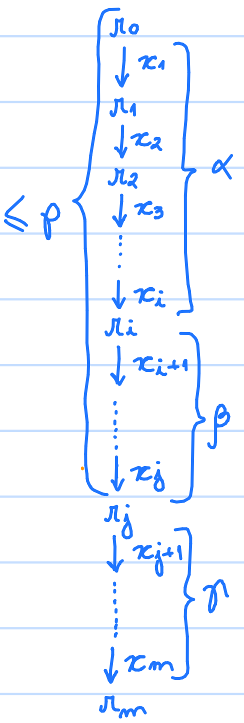
Seja $p = |Q|$.

Seja $w \in L$, com $|w| \geq p$ e $w = x_1 x_2 \dots x_m$, onde cada $x_i \in \Sigma$.

Seja $(r_0, r_1, \dots, r_m)$ a sequência de estados pelos quais M passa ao computar w, isto é, M está no estado r_t após ler os t primeiros símbolos de w.

Pelo princípio da casa dos pombos, os $p+1$ primeiros estados da sequência não são todos diferentes.

Sejam i e j, com $0 \leq i < j \leq p$, tais que $r_i = r_j$.



Vamos dividir $w = \alpha\beta\gamma$ com $\alpha = x_1 \dots x_i$, $\beta = x_{i+1} \cdots x_j$ e $\gamma = x_{j+1} \dots x_m$.

Note que M aceita $\alpha\beta^k\gamma$ para qualquer $k \geq 0$, pois segue a sequência $(r_0, r_1, \dots, r_i, \underbrace{r_{i+1}, \dots, r_j = r_i}_{\text{rep. 1}}, \underbrace{r_{i+1}, \dots, r_j}_{\text{rep. 2}}, \underbrace{\dots\dots}_{k \text{ rep.}}, r_{j+1}, \dots, r_m)$.

Além disso $\beta \neq \varepsilon$, pois $i < j$, e $|\alpha\beta| \leq p$, pois $j \leq p$.

CQD

Exemplos do lema do bombeamento para LRs

Prove que $L = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$ não é regular.

> **LEMA:** Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que (1) $\beta \neq \varepsilon$
> (2) $|\alpha\beta| \leq p$
> (3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

Assuma que L é regular. Então o lema vale. Seja p o valor dado pelo lema e $w = 0^p 1^p$.
Como $|w| \geq p$, w pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3).
Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$, para algum $t \geq 1$, e $\alpha = 0^r$, para algum $r \geq 0$.
Então $\alpha\beta\beta\gamma = 0^r 0^{2t} 0^{p-r-t} 1^p$. Mas $r+2t+p-r-t = p+t$, o que faz $\alpha\beta^2\gamma \notin L$, uma contradição, pois (3) vale.
Logo, L não é regular.

CQD

Exemplos do lema do bombeamento para LRs

Prove que $L_2 = \{\lambda\lambda : \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

> **LEMA:** Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que (1) $\beta \neq \varepsilon$
> (2) $|\alpha\beta| \leq p$
> (3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

Assuma que L_2 é regular. Então o lema vale. Seja p o valor dado pelo lema e $w = 0^p 1 0^p 1$.
Como $|w| \geq p$, w pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3).
Qualquer que seja a divisão em que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, temos $\beta = 0^t$, para algum $t \geq 1$, e $\alpha = 0^r$, para algum $r \geq 0$.
Então $\alpha\beta\beta\gamma = 0^r 0^{2t} 0^{p-r-t} 1 0^p 1$. Mas $r+2t+p-r-t = p+t$, e não há forma de dividir $0^{p+t} 1 0^p 1$ em duas partes iguais. Logo, $\alpha\beta^2\gamma \notin L_2$, uma contradição. Logo, L_2 não é regular.

CQD

Note como falha com $w = 0^p 0^p$

Exemplos do lema do bombeamento para LRs

Prove que $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

LEMA: Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que
(1) $\beta \neq \varepsilon$
(2) $|\alpha\beta| \leq p$
(3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

Assuma que L_3 é regular. Então o lema vale. Seja p o valor dado pelo lema e $w = 0^{2p}1^p$.
Como $|w| \geq p$, w pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3).
Qualquer que seja a divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, teremos $\beta = 0^t$, para algum $t \geq 1$, e $\alpha = 0^r$, para algum $r \geq 0$.

$$\overbrace{0\,0 \cdots 0\ \ 0\,0 \cdots 0}^{2p}\ \ \overbrace{1\,1 \cdots 1}^{p}$$

Dá errado!

Exemplos do lema do bombeamento para LRs

Prove que $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

LEMA: Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que
(1) $\beta \neq \varepsilon$
(2) $|\alpha\beta| \leq p$
(3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

Assuma que L_3 é regular. Então o lema vale. Seja p o valor dado pelo lema e $w = 0^{p+1}1^p$.
Como $|w| \geq p$, w pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3).
Qualquer que seja a divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, teremos $\beta = 0^t$, para algum $t \geq 1$, e $\alpha = 0^r$, para algum $r \geq 0$.
Então $\alpha\gamma = 0^r 0^{p+1-r-t} 1^p$. Mas $r+p+1-r-t = p+1-t \leq p$, o que faz $\alpha\beta^0\gamma \notin L_3$, uma contradição.
Logo, L_3 não é regular. CQD

Exemplos do lema do bombeamento para LRs

Prove que $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

LEMA: Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que
(1) $\beta \neq \varepsilon$
(2) $|\alpha\beta| \leq p$
(3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

Assuma que L_4 é regular. Então o lema vale. Seja p o valor dado pelo lema e $w = 1^{p^2}$.
Como $|w| \geq p$, w pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3).
Podemos considerar que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, pois caso contrário (1) e (2) não valem.
Note que $|\alpha\beta\gamma| = p^2$. Como $|\alpha\beta| \leq p$, então $|\beta| \leq p$.
Então $|\alpha\beta^2\gamma| = |\alpha\beta\gamma| + |\beta| = p^2 + |\beta| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$.
Como $|\beta| > 0$, então $|\alpha\beta^2\gamma| > |\alpha\beta\gamma| = p^2$.
Mas então $p^2 < |\alpha\beta^2\gamma| < (p+1)^2$, o que faz $\alpha\beta^2\gamma \notin L_4$, uma contradição.
Logo, L_4 não é regular.

CQD

Outra forma de provar não regularidade

Prove que $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1\}$ não é regular.

Se L_5 fosse regular, então $L_5 \cap \mathbf{0^*1^*}$ também seria, pois $\mathbf{0^*1^*}$ claramente é regular e linguagens regulares são fechadas sob interseção.
Mas $L_5 \cap \mathbf{0^*1^*} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$, que, já vimos, não é regular.
Logo, L_5 não é regular.

CQD

Erros ao usar o lema do bombeamento para linguagens regulares

Considere $A = \{ w\lambda w : w, \lambda \in \{0,1\}^+ \}$.

Suponha que A é regular. Então o lema vale. Seja p o valor dado pelo lema e tome $w = 0^p 1 0^p$.

> **LEMA:** Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que
> (1) $\beta \neq \varepsilon$
> (2) $|\alpha\beta| \leq p$
> (3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

$$\overbrace{0\,0\,\ldots\,0}^{p}\,1\,\overbrace{0\,0\,\ldots\,0}^{p}$$

Erros ao usar o lema do bombeamento para linguagens regulares

Considere $B = \{ 1^n w : w \in \{0,1\}^* \text{ e } |w|_1 \geq n \}$.

Suponha que B é regular. Então o lema vale. Seja p o valor dado pelo lema e tome $w = 1^p 1^p$.

> **LEMA:** Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $w \in L$ com $|w| \geq p$ pode ser escrita da forma $w = \alpha\beta\gamma$ em que
> (1) $\beta \neq \varepsilon$
> (2) $|\alpha\beta| \leq p$
> (3) para todo $k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in L$.

$$1\,1\,\ldots\,1\quad 1\,1\,\ldots\,1$$

Tome $w = 1^p 0 1^p$.

$$1\,1\,\ldots\,1\;0\;1\,1\,\ldots\,1$$