

# Disciplinas MCTA015-13 / CCM-104

## Linguagens Formais e Autômatas / Teoria da Computação

---

**Profa. Carla Negri Lintzmayer**

`carla.negri@ufabc.edu.br`

`www.professor.ufabc.edu.br/~carla.negri`

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC



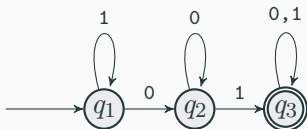
Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre AFDs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

## Primeiro exemplo

---

## Demonstrando a linguagem de um AFD

Considere o seguinte AFD  $M_1$ :



### Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido acima e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

- (1)  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .
- (2)  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ .
- (3)  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1\alpha$  para  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

(1) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ , então  $\omega = 1^i$  para  $i \geq 0$ ” é verdadeira.

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

(1) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ , então  $\omega = 1^i$  para  $i \geq 0$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ ” é verdadeira.



## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

- (1) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ , então  $\omega = 1^i$  para  $i \geq 0$ ” é verdadeira.  
“se  $\omega = 1^i$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ ” é verdadeira.
- (2) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ , então  $\omega = 1^i 0^k$  para  $i \geq 0, k \geq 1$ ” é verdadeira.

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

(1) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ , então  $\omega = 1^i$  para  $i \geq 0$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ ” é verdadeira.

(2) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ , então  $\omega = 1^i 0^k$  para  $i \geq 0, k \geq 1$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i 0^k$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ ” é verdadeira.

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

(1) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ , então  $\omega = 1^i$  para  $i \geq 0$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ ” é verdadeira.

(2) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ , então  $\omega = 1^i 0^k$  para  $i \geq 0, k \geq 1$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i 0^k$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ ” é verdadeira.

(3) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$ , então  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para  $i \geq 0, k \geq 1, \alpha \in \Sigma^*$ ” é verdadeira.

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

(1) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ , então  $\omega = 1^i$  para  $i \geq 0$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ ” é verdadeira.

(2) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ , então  $\omega = 1^i 0^k$  para  $i \geq 0, k \geq 1$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i 0^k$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ ” é verdadeira.

(3) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$ , então  $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$  para

$i \geq 0, k \geq 1, \alpha \in \Sigma^*$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$ ” é verdadeira.

## Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em  $|\omega|$ .

*Caso base:*  $\omega = 0$ . Neste caso,  $\omega = \varepsilon$  e sabemos que  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ .

(1) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ , então  $\omega = 1^i$  para  $i \geq 0$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$ ” é verdadeira.

(2) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ , então  $\omega = 1^i 0^k$  para  $i \geq 0, k \geq 1$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i 0^k$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$ ” é verdadeira.

(3) “se  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$ , então  $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$  para  $i \geq 0, k \geq 1, \alpha \in \Sigma^*$ ” é verdadeira.

“se  $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ , então  $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$ ” é verdadeira.

Portanto, o resultado segue no caso base.

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que  $|\omega| = n > 0$  e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que  $n$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que  $|\omega| = n > 0$  e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que  $n$ .

Como  $n > 0$ , podemos escrever  $\omega = \gamma x$ , com  $x \in \Sigma$  e  $\gamma \in \Sigma^*$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que  $|\omega| = n > 0$  e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que  $n$ .

Como  $n > 0$ , podemos escrever  $\omega = \gamma x$ , com  $x \in \Sigma$  e  $\gamma \in \Sigma^*$ .

Então  $|\gamma| < n$ , o que, por HI, significa que (1)–(3) valem para  $\gamma$ .



## Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que  $|\omega| = n > 0$  e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que  $n$ .

Como  $n > 0$ , podemos escrever  $\omega = \gamma x$ , com  $x \in \Sigma$  e  $\gamma \in \Sigma^*$ .

Então  $|\gamma| < n$ , o que, por HI, significa que (1)–(3) valem para  $\gamma$ .

Resta provar que (1)–(3) valem para  $\omega$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(1 \Rightarrow)$       “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(1 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(1 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ .

Por definição,  $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(1 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ .

Por definição,  $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$ .

Logo,  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$  e  $x = 1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1  $\Rightarrow$ ) “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ .

Por definição,  $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$ .

Logo,  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$  e  $x = 1$ .

Como valem (1)–(3) para  $\gamma$ , então por (1) temos  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1  $\Rightarrow$ ) “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ .

Por definição,  $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$ .

Logo,  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$  e  $x = 1$ .

Como valem (1)–(3) para  $\gamma$ , então por (1) temos  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .

Mas então vale que  $\omega = 1^{i+1} = 1^j$  para algum  $j \geq 0$ .

$$(1 \Leftarrow) \quad " \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0 " \Rightarrow " \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 "$$



## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(1 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”  $\Rightarrow$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(1 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”  $\Rightarrow$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .

Como  $n > 0$ , temos  $x = 1$  e  $\gamma = 1^{i-1}$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(1 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”  $\Rightarrow$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .

Como  $n > 0$ , temos  $x = 1$  e  $\gamma = 1^{i-1}$ .

Por HI, então, como (1) vale para  $\gamma$ , temos que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1  $\Leftarrow$ ) “ $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ ”  $\Rightarrow$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .

Como  $n > 0$ , temos  $x = 1$  e  $\gamma = 1^{i-1}$ .

Por HI, então, como (1) vale para  $\gamma$ , temos que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ .

Logo,  $\delta(\hat{\delta}(q_1, \delta), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1$ , de onde concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Rightarrow)$       “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ .

Então, observando o AFD, deve ser o caso de  $x = 0$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ .

Então, observando o AFD, deve ser o caso de  $x = 0$ .

Como  $\delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), 0) = q_2$ , temos duas possibilidades:



## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ .

Então, observando o AFD, deve ser o caso de  $x = 0$ .

Como  $\delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), 0) = q_2$ , temos duas possibilidades:

- $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ , o que nos diz, por H1 (1), que  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$  e, portanto, concluímos que  $\omega = 1^i 0$  para algum  $i \geq 0$ ;

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ .

Então, observando o AFD, deve ser o caso de  $x = 0$ .

Como  $\delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), 0) = q_2$ , temos duas possibilidades:

- $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ , o que nos diz, por HI (1), que  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$  e, portanto, concluímos que  $\omega = 1^i 0$  para algum  $i \geq 0$ ;
- $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ , o que nos diz, por HI (2), que  $\gamma = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$  e, portanto, concluímos que  $\omega = 1^i 0^j$  para algum  $i \geq 0$  e  $j \geq 1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$$(2 \Leftarrow) \quad \begin{array}{l} \text{"}\omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1\text{"} \Rightarrow \\ \text{"}\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2\text{"} \end{array}$$

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$$(2 \Leftarrow) \quad \begin{array}{l} \text{"}\omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1\text{"} \Rightarrow \\ \text{"}\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2\text{"} \end{array}$$

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ .

Então  $x = 0$  e temos duas possibilidades:

- $k = 1$ , o que faz  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$$(2 \Leftarrow) \quad \text{"}\omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1\text{"} \Rightarrow \\ \text{"}\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2\text{"}$$

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ .

Então  $x = 0$  e temos duas possibilidades:

- $k = 1$ , o que faz  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ . Por HI (1), temos que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ . Como  $\delta(q_1, 0) = q_2$ , concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ;

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$$(2 \Leftarrow) \quad \text{"}\omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1\text{"} \Rightarrow \\ \text{"}\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2\text{"}$$

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ .

Então  $x = 0$  e temos duas possibilidades:

- $k = 1$ , o que faz  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ . Por HI (1), temos que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ . Como  $\delta(q_1, 0) = q_2$ , concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ;
- $k > 1$ , o que faz  $\gamma = 1^i 0^j$  para algum  $i \geq 0$  e  $j \geq 1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(2 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ .

Então  $x = 0$  e temos duas possibilidades:

- $k = 1$ , o que faz  $\gamma = 1^i$  para algum  $i \geq 0$ . Por HI (1), temos que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ . Como  $\delta(q_1, 0) = q_2$ , concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ ;
- $k > 1$ , o que faz  $\gamma = 1^i 0^j$  para algum  $i \geq 0$  e  $j \geq 1$ . Por HI (2), temos que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ . Como  $\delta(q_2, 0) = q_2$ , concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ .



## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  
 $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

- Se  $x = 0$ , então pelo AFD podemos ver que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3  $\Rightarrow$ ) “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

- Se  $x = 0$ , então pelo AFD podemos ver que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

- Se  $x = 0$ , então pelo AFD podemos ver que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ . Mas então  $\omega = 1^i 0^k 1 \beta$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\beta \in \Sigma^*$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

- Se  $x = 0$ , então pelo AFD podemos ver que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ . Mas então  $\omega = 1^i 0^k 1 \beta$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\beta \in \Sigma^*$ .
- Se  $x = 1$ , então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ , então por HI (2) temos  $\gamma = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

- Se  $x = 0$ , então pelo AFD podemos ver que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ . Mas então  $\omega = 1^i 0^k 1 \beta$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\beta \in \Sigma^*$ .
- Se  $x = 1$ , então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ , então por HI (2) temos  $\gamma = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ . Mas então concluímos que  $\omega = 1^i 0^k 1$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ;

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

- Se  $x = 0$ , então pelo AFD podemos ver que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ . Mas então  $\omega = 1^i 0^k 1 \beta$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\beta \in \Sigma^*$ .
- Se  $x = 1$ , então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ , então por HI (2) temos  $\gamma = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ . Mas então concluímos que  $\omega = 1^i 0^k 1$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ;
  - se  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ , então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .



## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Rightarrow)$  “ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”  $\Rightarrow$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”

Suponha que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Vamos dividir os casos de acordo com o valor de  $x$ .

- Se  $x = 0$ , então pelo AFD podemos ver que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ . Mas então  $\omega = 1^i 0^k 1 \beta$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\beta \in \Sigma^*$ .
- Se  $x = 1$ , então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ , então por HI (2) temos  $\gamma = 1^i 0^k$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ . Mas então concluímos que  $\omega = 1^i 0^k 1$  para algum  $i \geq 0$  e  $k \geq 1$ ;
  - se  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ , então por HI (3) temos  $\gamma = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ . Mas então concluímos que  $\omega = 1^i 0^k 1 \beta$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\beta \in \Sigma^*$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$       “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de  $\alpha$ :

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de  $\alpha$ :

- Se  $\alpha \neq \varepsilon$ , então  $\gamma = 1^i 0^k 1 \beta$ , com  $\alpha = \beta x$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de  $\alpha$ :

- Se  $\alpha \neq \varepsilon$ , então  $\gamma = 1^i 0^k 1 \beta$ , com  $\alpha = \beta x$ . Então por HI (3), vale que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de  $\alpha$ :

- Se  $\alpha \neq \varepsilon$ , então  $\gamma = 1^i 0^k 1 \beta$ , com  $\alpha = \beta x$ . Então por HI (3), vale que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Como  $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$  independente do valor de  $x$ , então concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de  $\alpha$ :

- Se  $\alpha \neq \varepsilon$ , então  $\gamma = 1^i 0^k 1 \beta$ , com  $\alpha = \beta x$ . Então por HI (3), vale que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Como  $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$  independente do valor de  $x$ , então concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ .
- Se  $\alpha = \varepsilon$ , então  $x = 1$  e  $\gamma = 1^i 0^k$ .



## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de  $\alpha$ :

- Se  $\alpha \neq \varepsilon$ , então  $\gamma = 1^i 0^k 1 \beta$ , com  $\alpha = \beta x$ . Então por HI (3), vale que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Como  $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$  independente do valor de  $x$ , então concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ .
- Se  $\alpha = \varepsilon$ , então  $x = 1$  e  $\gamma = 1^i 0^k$ . Então por HI (2), vale que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ .

## Demonstração do Lema 1 (cont.)

$(3 \Leftarrow)$  “ $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ ”  $\Rightarrow$   
“ $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ ”

Suponha que  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ .

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de  $\alpha$ :

- Se  $\alpha \neq \varepsilon$ , então  $\gamma = 1^i 0^k 1 \beta$ , com  $\alpha = \beta x$ . Então por HI (3), vale que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$ . Como  $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$  independente do valor de  $x$ , então concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ .
- Se  $\alpha = \varepsilon$ , então  $x = 1$  e  $\gamma = 1^i 0^k$ . Então por HI (2), vale que  $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$ . Como  $\delta(q_2, x) = q_3$ , concluímos que  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ .

□

# Demonstrando a linguagem de um AFD

## Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

$$(1) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0.$$

$$(2) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1.$$

$$(3) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1 \alpha \text{ para } i \geq 0, k \geq 1 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*.$$

## Teorema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$ . Então  $L(M_1) = L$ .

# Demonstrando a linguagem de um AFD

## Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

$$(1) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0.$$

$$(2) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1.$$

$$(3) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1 \alpha \text{ para } i \geq 0, k \geq 1 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*.$$

## Teorema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$ . Então  $L(M_1) = X$ .

**Demonstração.** Seja  $\omega \in X$ .

## Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

$$(1) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0.$$

$$(2) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1.$$

$$(3) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1 \alpha \text{ para } i \geq 0, k \geq 1 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*.$$

## Teorema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$ . Então  $L(M_1) = X$ .

**Demonstração.** Seja  $\omega \in X$ . Então  $\omega = \alpha 01 \beta$ .

# Demonstrando a linguagem de um AFD

## Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

$$(1) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0.$$

$$(2) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1.$$

$$(3) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1 \alpha \text{ para } i \geq 0, k \geq 1 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*.$$

## Teorema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$ . Então  $L(M_1) = X$ .

**Demonstração.** Seja  $\omega \in X$ . Então  $\omega = \alpha 01 \beta$ . Pelo Lema 1,  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ , o que implica em  $\omega \in L(M_1)$ .

Agora seja  $\omega \in L(M_1)$ .

# Demonstrando a linguagem de um AFD

## Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

$$(1) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0.$$

$$(2) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1.$$

$$(3) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1 \alpha \text{ para } i \geq 0, k \geq 1 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*.$$

## Teorema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$ . Então  $L(M_1) = X$ .

**Demonstração.** Seja  $\omega \in X$ . Então  $\omega = \alpha 01 \beta$ . Pelo Lema 1,  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ , o que implica em  $\omega \in L(M_1)$ .

Agora seja  $\omega \in L(M_1)$ . Então  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ .

# Demonstrando a linguagem de um AFD

## Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

$$(1) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0.$$

$$(2) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1.$$

$$(3) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1 \alpha \text{ para } i \geq 0, k \geq 1 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*.$$

## Teorema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$ . Então  $L(M_1) = X$ .

**Demonstração.** Seja  $\omega \in X$ . Então  $\omega = \alpha 01\beta$ . Pelo Lema 1,  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ , o que implica em  $\omega \in L(M_1)$ .

Agora seja  $\omega \in L(M_1)$ . Então  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Pelo Lema 1,  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ , que claramente contém 01.



# Demonstrando a linguagem de um AFD

## Lema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $\omega \in \{0, 1\}^*$ . Vale que

$$(1) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i \text{ para algum } i \geq 0.$$

$$(2) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k \text{ para algum } i \geq 0 \text{ e } k \geq 1.$$

$$(3) \hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1 \alpha \text{ para } i \geq 0, k \geq 1 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*.$$

## Teorema 1

Sejam  $M_1$  o AFD definido anteriormente e  $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$ . Então  $L(M_1) = X$ .

**Demonstração.** Seja  $\omega \in X$ . Então  $\omega = \alpha 01\beta$ . Pelo Lema 1,  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ , o que implica em  $\omega \in L(M_1)$ .

Agora seja  $\omega \in L(M_1)$ . Então  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$ . Pelo Lema 1,  $\omega = 1^i 0^k 1 \alpha$  para algum  $i \geq 0$ ,  $k \geq 1$  e  $\alpha \in \Sigma^*$ , que claramente contém 01. Logo,  $\omega \in X$ . □

- (1)  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = \varepsilon$  ou  $\omega$  não contém 01 como subcadeia e termina em 1.
- (2)  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega$  não contém 01 como subcadeia e termina em 0.
- (3)  $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega$  contém 01 como subcadeia.