# Disciplinas MCTA015-13 / CCM-104 Linguagens Formais e Autômata / Teoria da Computação

**Profa. Carla Negri Lintzmayer**

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/∼carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

UFABC

# Aviso legal 👍

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre GLCs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

# Demonstrando a linguagem de um GLC

**Teorema**

Seja $G = (\{P\}, \{0, 1\}, \{P \to \varepsilon, P \to 0, P \to 1, P \to 0P0, P \to 1P1\}, P)$ uma GLC. Seja $X = \{\omega \in \{0, 1\}^* : \omega = \omega^R\}$. Então $L(G) = X$.

# Demonstrando a linguagem de um GLC

**Teorema**

Seja
$G = (\{P\}, \{0,1\}, \{P \to \varepsilon, P \to 0, P \to 1, P \to 0P0, P \to 1P1\}, P)$
uma GLC. Seja $X = \{\omega \in \{0,1\}^* : \omega = \omega^R\}$. Então $L(G) = X$.

**Demonstração**

Vamos mostrar que $\omega \in L(G) \iff \omega \in X$.
($\Rightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Por definição, $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$. Vamos mostrar por indução no número $n$ de passos da derivação que $\omega \in X$.

# Demonstrando a linguagem de um GLC

**Teorema**

Seja
$G = (\{P\}, \{0, 1\}, \{P \to \varepsilon, P \to 0, P \to 1, P \to 0P0, P \to 1P1\}, P)$
uma GLC. Seja $X = \{\omega \in \{0, 1\}^* : \omega = \omega^R\}$. Então $L(G) = X$.

**Demonstração**

Vamos mostrar que $\omega \in L(G) \iff \omega \in X$.
($\Rightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Por definição, $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$. Vamos mostrar por indução no número $n$ de passos da derivação que $\omega \in X$.
*Caso base:* $n = 1$. Então $P \Rightarrow \omega$, e só pode ser o caso de $\omega = \varepsilon$, $\omega = 0$ ou $\omega = 1$. Nos três casos, $\omega$ é palíndromo e, portanto, $\omega \in X$.

# Demonstração do Teorema

## Demonstração (cont.)

($\Rightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Por definição, $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$. Vamos mostrar por indução no número $n$ de passos da derivação que $\omega \in X$.

Seja então o caso de $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$ em $n > 1$ passos.

*Hipótese:* se $P \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $k$ passos, com $1 \leq k < n$, então $\alpha \in X$.

**Demonstração (cont.)**

($\Rightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Por definição, $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$. Vamos mostrar por indução no número $n$ de passos da derivação que $\omega \in X$.

Seja então o caso de $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$ em $n > 1$ passos.

*Hipótese:* se $P \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $k$ passos, com $1 \leq k < n$, então $\alpha \in X$.

Como $n > 1$, então $P \Rightarrow \gamma \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, sendo que $\gamma = 0P0$ ou $\gamma = 1P1$.

S.p.g., suponha $\gamma = 0P0$.

# Demonstração do Teorema

## Demonstração (cont.)

($\Rightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Por definição, $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$. Vamos mostrar por indução no número $n$ de passos da derivação que $\omega \in X$.

Seja então o caso de $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$ em $n > 1$ passos.

*Hipótese:* se $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $k$ passos, com $1 \leq k < n$, então $\alpha \in X$.

Como $n > 1$, então $P \Rightarrow \gamma \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$, sendo que $\gamma = 0P0$ ou $\gamma = 1P1$.

S.p.g., suponha $\gamma = 0P0$.

Então $\omega = 0\alpha 0$, com $\alpha \in \{0, 1\}^*$ sendo tal que $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $n - 1$ passos.

### Demonstração (cont.)

($\Rightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Por definição, $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$. Vamos mostrar por indução no número $n$ de passos da derivação que $\omega \in X$.

Seja então o caso de $P \overset{*}{\Rightarrow} \omega$ em $n > 1$ passos.

*Hipótese:* se $P \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $k$ passos, com $1 \leq k < n$, então $\alpha \in X$.

Como $n > 1$, então $P \Rightarrow \gamma \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, sendo que $\gamma = 0P0$ ou $\gamma = 1P1$.

S.p.g., suponha $\gamma = 0P0$.

Então $\omega = 0\alpha 0$, com $\alpha \in \{0, 1\}^*$ sendo tal que $P \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $n - 1$ passos.

Logo, por HI, $\alpha \in X$, ou seja, $\alpha = \alpha^R$.

**Demonstração (cont.)**

($\Rightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Por definição, $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$. Vamos mostrar por indução no número $n$ de passos da derivação que $\omega \in X$.

Seja então o caso de $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$ em $n > 1$ passos.

*Hipótese:* se $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $k$ passos, com $1 \leq k < n$, então $\alpha \in X$.

Como $n > 1$, então $P \Rightarrow \gamma \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$, sendo que $\gamma = 0P0$ ou $\gamma = 1P1$.

S.p.g., suponha $\gamma = 0P0$.

Então $\omega = 0\alpha 0$, com $\alpha \in \{0, 1\}^*$ sendo tal que $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$ em $n - 1$ passos.

Logo, por HI, $\alpha \in X$, ou seja, $\alpha = \alpha^R$.

Mas então $\omega = 0\alpha 0 = 0\alpha^R 0 = \omega^R$ e, portanto, $\omega \in X$.

**Demonstração (cont.)**

($\Leftarrow$) Suponha que $\omega \in X$. Então $\omega = \omega^R$. Vamos mostrar por indução em $|\omega|$ que $\omega \in L(G)$.

**Demonstração (cont.)**

($\Leftarrow$) Suponha que $\omega \in X$. Então $\omega = \omega^R$. Vamos mostrar por indução em $|\omega|$ que $\omega \in L(G)$.

*Caso base:* $|\omega| = 0$ e $|\omega| = 1$. Então só pode ser $\omega = \varepsilon$, $\omega =$ 0 ou $\omega =$ 1. Como $P \Rightarrow \varepsilon$, $P \Rightarrow$ 0 e $P \Rightarrow$ 1, então $\omega \in L(G)$.

# Demonstração do Teorema

## Demonstração (cont.)

($\Leftarrow$) Suponha que $\omega \in X$. Então $\omega = \omega^R$. Vamos mostrar por indução em $|\omega|$ que $\omega \in L(G)$.

Seja então $\omega = \omega^R$ com $|\omega| = n > 2$.

*Hipótese:* para qualquer $\alpha \in X$ tal que $0 \leq |\alpha| < n$ vale que $\alpha \in L(G)$.

**Demonstração (cont.)**

($\Leftarrow$) Suponha que $\omega \in X$. Então $\omega = \omega^R$. Vamos mostrar por indução em $|\omega|$ que $\omega \in L(G)$.

Seja então $\omega = \omega^R$ com $|\omega| = n > 2$.

*Hipótese:* para qualquer $\alpha \in X$ tal que $0 \leq |\alpha| < n$ vale que $\alpha \in L(G)$.

Como $\omega = \omega^R$ e $|\omega| > 2$, então vale que $\omega = x\lambda x$, para $x \in \{0, 1\}$ e $\lambda \in X$.

**Demonstração (cont.)**

($\Leftarrow$) Suponha que $\omega \in X$. Então $\omega = \omega^R$. Vamos mostrar por indução em $|\omega|$ que $\omega \in L(G)$.

Seja então $\omega = \omega^R$ com $|\omega| = n > 2$.

*Hipótese:* para qualquer $\alpha \in X$ tal que $0 \leq |\alpha| < n$ vale que $\alpha \in L(G)$.

Como $\omega = \omega^R$ e $|\omega| > 2$, então vale que $\omega = x\lambda x$, para $x \in \{0, 1\}$ e $\lambda \in X$.

Como $|\lambda| = n - 2$, então por HI temos $\lambda \in L(G)$, isto é, $P \overset{*}{\Rightarrow} \lambda$.

# Demonstração do Teorema

**Demonstração (cont.)**

($\Leftarrow$) Suponha que $\omega \in X$. Então $\omega = \omega^R$. Vamos mostrar por indução em $|\omega|$ que $\omega \in L(G)$.

Seja então $\omega = \omega^R$ com $|\omega| = n > 2$.

*Hipótese:* para qualquer $\alpha \in X$ tal que $0 \leq |\alpha| < n$ vale que $\alpha \in L(G)$.

Como $\omega = \omega^R$ e $|\omega| > 2$, então vale que $\omega = x\lambda x$, para $x \in \{0, 1\}$ e $\lambda \in X$.

Como $|\lambda| = n - 2$, então por HI temos $\lambda \in L(G)$, isto é, $P \overset{*}{\Rightarrow} \lambda$.

Como $P \rightarrow 0P0$ e $P \rightarrow 1P1$ são regras de $G$, então $P \Rightarrow xPx \overset{*}{\Rightarrow} x\lambda x = \omega$. Logo, $\omega \in L(G)$. C.Q.D.

# Resumo (e forma como faremos)

(1) Se $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$, então $\omega = \varepsilon$, $\omega = 0$, $\omega = 1$, ou então $\omega = 0\alpha 0$ ou $\omega = 1\alpha 1$, sendo que $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$.
Claramente $\varepsilon, 0, 1 \in X$.
Assumindo que $\alpha \in X$, então $\alpha = \alpha^R$, de forma que $x\alpha x = x\alpha^R x$ para qualquer $x \in \{0, 1\}$, o que faz $\omega \in X$ também.

(2) Se $\omega \in X$, então $\omega = \omega^R$.
Assim, $\omega = \varepsilon$, $\omega = 0$, $\omega = 1$, ou então $\omega = x\alpha x$ com $\alpha \in X$ e $x \in \{0, 1\}$.
Claramente $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$, $P \stackrel{*}{\Rightarrow} 0$ e $P \stackrel{*}{\Rightarrow} 1$.
Assumindo que $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$, então como $P \stackrel{*}{\Rightarrow} xPx$ vale que $P \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega$.