Disciplinas MCTA015-13 / CCM-104 Linguagens Formais e Autômata / Teoria da Computação

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/∼carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

UFABC

Aviso legal 👍

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre MTs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

Conjuntos e funções

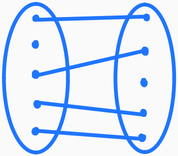
Conjuntos

1873, Georg Cantor: dois conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho?

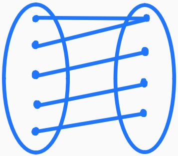
Funções

Sejam A e B conjuntos e f: $A \to B$ uma função, dizemos que f é:

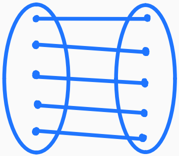
- injetora (um-para-um): se $f(x) \neq f(y)$ sempre que $x \neq y$
- sobrejetora: se $\forall z \in B \quad \exists x \in A$ tal que $z = f(x)$
- bijetora (correspondência): se é injetora e sobrejetora.



injetora
não sobrejetora



não injetora
sobrejetora



bijetora

Definição

Dois conjuntos A e B têm o mesmo tamanho se existe uma bijeção $f\colon A \to B$.

Definição

Um conjunto A é contável se:

- é finito, ou
- tem o mesmo tamanho que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Conjuntos contáveis

Números pares

Teorema

O conjunto $\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dos números naturais pares é contável.

Números pares

Teorema

O conjunto $\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dos números naturais pares é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = 2n$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}$.

Números pares

Teorema

O conjunto $\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dos números naturais pares é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = 2n$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}$.

Para $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$, claramente $2n \neq 2m$, o que implica $f(n) \neq f(m)$. Logo, f é injetora.

Números pares

Teorema

O conjunto $\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dos números naturais pares é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = 2n$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}$.
Para $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$, claramente $2n \neq 2m$, o que implica $f(n) \neq f(m)$. Logo, f é injetora.
Seja $a \in \mathcal{P}$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k$. Mas então $f(k) = a$. Logo, f é sobrejetora. C.Q.D.

Números inteiros

Teorema

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros é contável.

Números inteiros

Teorema

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dos números inteiros é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$. Se ambos têm a mesma paridade, então claramente $f(n) \neq f(m)$, pois $\frac{n}{2} \neq \frac{m}{2}$ e $-\frac{n+1}{2} \neq -\frac{m+1}{2}$.

Números inteiros

Teorema

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$. Se ambos têm a mesma paridade, então claramente $f(n) \neq f(m)$, pois $\frac{n}{2} \neq \frac{m}{2}$ e $-\frac{n+1}{2} \neq -\frac{m+1}{2}$.

Se têm a mesma paridade, também claramente $f(n) \neq f(m)$, já que um é positivo e outro é negativo. Então f é injetora.

Teorema

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$. Se ambos têm a mesma paridade, então claramente $f(n) \neq f(m)$, pois $\frac{n}{2} \neq \frac{m}{2}$ e $-\frac{n+1}{2} \neq -\frac{m+1}{2}$.

Se têm a mesma paridade, também claramente $f(n) \neq f(m)$, já que um é positivo e outro é negativo. Então f é injetora.

Agora seja $z \in \mathbb{Z}$. Se $z \geq 0$, então $2z$ é um número natural par e $f(2z) = z$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros é contável.

Demonstração.

Vamos mostrar que $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$. Se ambos têm a mesma paridade, então claramente $f(n) \neq f(m)$, pois $\frac{n}{2} \neq \frac{m}{2}$ e $-\frac{n+1}{2} \neq -\frac{m+1}{2}$.

Se têm a mesma paridade, também claramente $f(n) \neq f(m)$, já que um é positivo e outro é negativo. Então f é injetora.

Agora seja $z \in \mathbb{Z}$. Se $z \geq 0$, então $2z$ é um número natural par e $f(2z) = z$. Se $z \leq 0$, então $-(2z+1)$ é um número natural ímpar e $f(-(2z+1)) = z$. Logo, f é sobrejetora. C.Q.D.

Cadeias sobre um alfabeto

Teorema

O conjunto Σ^* é contável, para qualquer Σ.

Teorema

O conjunto Σ^* é contável, para qualquer Σ.

Demonstração.

Seja $C_i = \{\omega \in \Sigma^* \colon |\omega| = i\}$. Note que $|C_i| = |\Sigma|^i$.

Cadeias sobre um alfabeto

Teorema

O conjunto Σ^* é contável, para qualquer Σ.

Demonstração.

Seja $C_i = \{\omega \in \Sigma^* \colon |\omega| = i\}$. Note que $|C_i| = |\Sigma|^i$.
Faça uma lista que contém os elementos de C_0 seguidos dos elementos de C_1, seguidos por C_2, e assim por diante.

Cadeias sobre um alfabeto

Teorema

O conjunto Σ^* é contável, para qualquer Σ.

Demonstração.

Seja $C_i = \{\omega \in \Sigma^* : |\omega| = i\}$. Note que $|C_i| = |\Sigma|^i$.

Faça uma lista que contém os elementos de C_0 seguidos dos elementos de C_1, seguidos por C_2, e assim por diante.

Faça $f(n) =$ "a $(n+1)$-ésima cadeia dessa lista" para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

O conjunto Σ^* é contável, para qualquer Σ.

Demonstração.

Seja $C_i = \{\omega \in \Sigma^* : |\omega| = i\}$. Note que $|C_i| = |\Sigma|^i$.

Faça uma lista que contém os elementos de C_0 seguidos dos elementos de C_1, seguidos por C_2, e assim por diante.

Faça $f(n) =$ "a $(n+1)$-ésima cadeia dessa lista" para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que f é bijetora: duas posições diferentes possuem cadeias diferentes e toda cadeia está listada. C.Q.D.

Números racionais

Teorema

O conjunto $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\}$ dos números racionais não negativos é contável.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	...
0	$0/1$	$0/2$	$0/3$	$0/4$	$0/5$	$0/6$	$0/7$	
1	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	...
2	$2/1$	$2/2$	$2/3$	$2/4$	$2/5$	$2/6$	$2/7$	
3	$3/1$	$3/2$	$3/3$	$3/4$	$3/5$	$3/6$	$3/7$	...
4	$4/1$	$4/2$	$4/3$	$4/4$	$4/5$	$4/6$	$4/7$	
5	$5/1$	$5/2$	$5/3$	$5/4$	$5/5$	$5/6$	$5/7$	...
6	$6/1$	$6/2$	$6/3$	$6/4$	$6/5$	$6/6$	$6/7$	
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$

Números racionais

Teorema

O conjunto $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\}$ dos números racionais não negativos é contável.

Demonstração.

Seja $P_i = \{\frac{0}{i+1}, \frac{1}{i}, \frac{2}{i-1}, \dots, \frac{i}{1}\}$, para $i = 0, 1, 2, \dots$.

Números racionais

Teorema

O conjunto $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\}$ dos números racionais não negativos é contável.

Demonstração.

Seja $P_i = \{\frac{0}{i+1}, \frac{1}{i}, \frac{2}{i-1}, \dots, \frac{i}{1}\}$, para $i = 0, 1, 2, \dots$.
Note que $\mathbb{Q}_+ = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots$, pois qualquer $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ pertence ao conjunto P_j com $j = m + n - 1$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\}$ dos números racionais não negativos é contável.

Demonstração.

Seja $P_i = \{\frac{0}{i+1}, \frac{1}{i}, \frac{2}{i-1}, \ldots, \frac{i}{1}\}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$.
Note que $\mathbb{Q}_+ = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots$, pois qualquer $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ pertence ao conjunto P_j com $j = m + n - 1$.
Faça uma lista que contém os elementos de P_0 seguidos dos elementos de $P_1 \setminus P_0$, seguidos por $P_2 \setminus (P_1 \cup P_0)$, e assim por diante.

Números racionais

Teorema

O conjunto $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*\}$ dos números racionais não negativos é contável.

Demonstração.

Seja $P_i = \{\frac{0}{i+1}, \frac{1}{i}, \frac{2}{i-1}, \ldots, \frac{i}{1}\}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$.
Note que $\mathbb{Q}_+ = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots$, pois qualquer $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ pertence ao conjunto P_j com $j = m + n - 1$.
Faça uma lista que contém os elementos de P_0 seguidos dos elementos de $P_1 \setminus P_0$, seguidos por $P_2 \setminus (P_1 \cup P_0)$, e assim por diante.
Faça $f(n) =$ "o $(n+1)$-ésimo número dessa lista" para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\}$ dos números racionais não negativos é contável.

Demonstração.

Seja $P_i = \{\frac{0}{i+1}, \frac{1}{i}, \frac{2}{i-1}, \ldots, \frac{i}{1}\}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$.
Note que $\mathbb{Q}_+ = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots$, pois qualquer $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ pertence ao conjunto P_j com $j = m + n - 1$.
Faça uma lista que contém os elementos de P_0 seguidos dos elementos de $P_1 \setminus P_0$, seguidos por $P_2 \setminus (P_1 \cup P_0)$, e assim por diante.
Faça $f(n) =$ "o $(n + 1)$-ésimo número dessa lista" para todo $n \in \mathbb{N}$.
Note que f é bijetora: duas posições diferentes possuem dois racionais diferentes e todo elemento de $\mathbb{Q}_+$ está na lista. C.Q.D.

Máquinas de Turing

Teorema

O conjunto $T = \{M\colon M$ é uma máquina de Turing$\}$ é contável.

Teorema

O conjunto $T = \{M\colon M \text{ é uma máquina de Turing}\}$ é contável.

Demonstração.

Toda $M \in T$ possui uma codificação em cadeia $\langle M \rangle$ sobre algum alfabeto Σ.

Teorema

O conjunto $T = \{M \colon M$ é uma máquina de Turing$\}$ é contável.

Demonstração.

Toda $M \in T$ possui uma codificação em cadeia $\langle M \rangle$ sobre algum alfabeto Σ.

Como Σ^* é contável e $\{\langle M \rangle \colon M \in T\} \subseteq \Sigma^*$, então T é contável. C.Q.D.

Conjuntos incontáveis

Existem infinitos infinitos

- Alguns conjuntos infinitos são maiores do que $\mathbb{N}$.
- São chamados incontáveis.
  - Para eles, não há bijeção possível com $\mathbb{N}$.

Números reais

Teorema

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

Números reais

Teorema

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

Demonstração.

Suponha que $\mathbb{R}$ é contável.

Teorema

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

Demonstração.

Suponha que $\mathbb{R}$ é contável. Então existe uma bijeção $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 2{,}7\,1\,8\,2\,8\,1\,8\ldots\\
f(1) &= 1{,}1\,4\,1\,5\,9\,2\,6\ldots\\
f(2) &= 0{,}4\,1\,4\,2\,1\,3\,5\ldots\\
f(3) &= 2{,}6\,1\,8\,0\,3\,3\,9\ldots\\
f(4) &= 0{,}5\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Teorema

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

Demonstração.

(Cont.) Seja $x \in \mathbb{R}$ entre 0 e 1 tal que $x \neq f(0)$ pois a primeira casa decimal de x é diferente da primeira casa decimal de $f(0)$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

Demonstração.

(Cont.) Seja $x \in \mathbb{R}$ entre 0 e 1 tal que $x \neq f(0)$ pois a primeira casa decimal de x é diferente da primeira casa decimal de $f(0)$. Também $x \neq f(1)$, pois a segunda casa decimal de x é diferente da segunda casa decimal de $f(1)$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

Demonstração.

(Cont.) Seja $x \in \mathbb{R}$ entre 0 e 1 tal que $x \neq f(0)$ pois a primeira casa decimal de x é diferente da primeira casa decimal de $f(0)$.
Também $x \neq f(1)$, pois a segunda casa decimal de x é diferente da segunda casa decimal de $f(1)$.
De forma geral, $x \neq f(i)$, pois a $(i+1)$-ésima casa decimal de x difere da de $f(i)$, para todo $i \geq 0$.

Teorema

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

Demonstração.

(Cont.) Seja $x \in \mathbb{R}$ entre 0 e 1 tal que $x \neq f(0)$ pois a primeira casa decimal de x é diferente da primeira casa decimal de $f(0)$.
Também $x \neq f(1)$, pois a segunda casa decimal de x é diferente da segunda casa decimal de $f(1)$.
De forma geral, $x \neq f(i)$, pois a $(i+1)$-ésima casa decimal de x difere da de $f(i)$, para todo $i \geq 0$.
Mas então não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = f(n)$, o que é uma contradição com f ser bijetora.
Logo, f não existe. C.Q.D.

Outros resultados

Teorema

O conjunto $\mathcal{B} = \{s\colon s$ é sequência binária infinita$\}$ é incontável.

Outros resultados

Teorema

O conjunto $\mathcal{B} = \{s\colon s \text{ é sequência binária infinita}\}$ é incontável.

Teorema

O conjunto $\mathcal{P}(A)$ é incontável para qualquer conjunto A infinito.

Outros resultados

Teorema

O conjunto $\mathcal{B} = \{s \colon s$ é sequência binária infinita$\}$ é incontável.

Teorema

O conjunto $\mathcal{P}(A)$ é incontável para qualquer conjunto A infinito.

Teorema

Se $A \subseteq B$ e B é contável, então A é contável.

Se $A \subseteq B$ e A é incontável, então B é incontável.