Disciplinas MCTA015-13 / CCM-104 Linguagens Formais e Autômata / Teoria da Computação

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/∼carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

UFABC

Aviso legal 👍

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre LLCs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

Propriedades de linguagens livres de contexto

Propriedades de fechamento de linguagens livres de contexto

- Uma coleção de objetos é *fechada sob* alguma operação se, aplicando-se essa operação a membros da coleção, recebe-se um objeto ainda na coleção.
  - Por exemplo, números naturais são fechados sob a operação de soma.
  - Por exemplo, números naturais não são fechados sob a operação de divisão.
  - Por exemplo, linguagens regulares são fechadas sob união, concatenação, estrela, interseção, complemento, diferença e reverso.

Propriedades de fechamento de linguagens livres de contexto

As linguagens livres de contexto são fechadas sob:

1. União (teorema a seguir)
2. Concatenação (teorema a seguir)
3. Estrela (teorema a seguir)
4. Reverso (exercício na lista 2)
5. Interseção com LRs

Propriedades de fechamento de linguagens livres de contexto

As linguagens livres de contexto são fechadas sob:

1. União (teorema a seguir)
2. Concatenação (teorema a seguir)
3. Estrela (teorema a seguir)
4. Reverso (exercício na lista 2)
5. Interseção com LRs

Elas **não** são fechadas sob:

- Interseção
- Complemento

União

Teorema

A união de duas linguagens livres de contexto é livre de contexto.

União

Teorema

A união de duas linguagens livres de contexto é livre de contexto.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas LLCs.

União

Teorema

A união de duas linguagens livres de contexto é livre de contexto.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas LLCs. Por definição, seja $G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i)$ uma GLC que gera A_i, para $i = 1, 2$.

Renomeie V_2 para que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

União

Teorema

A união de duas linguagens livres de contexto é livre de contexto.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas LLCs. Por definição, seja $G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i)$ uma GLC que gera A_i, para $i = 1, 2$.

Renomeie V_2 para que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Construa $G = (V, \Sigma, R, S)$ em que

- $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$.

Claramente, $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = A_1 \cup A_2$. C.Q.D.

Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens livres de contexto é livre de contexto.

Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens livres de contexto é livre de contexto.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas LLCs. Por definição, seja $G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i)$ uma GLC que gera A_i, para $i = 1, 2$.

Renomeie V_2 para que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens livres de contexto é livre de contexto.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas LLCs. Por definição, seja $G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i)$ uma GLC que gera A_i, para $i = 1, 2$.

Renomeie V_2 para que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Construa $G = (V, \Sigma, R, S)$ em que

- $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$.

Claramente, $L(G) = L(G_1)L(G_2) = A_1 A_2$. C.Q.D.

Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem livre de contexto é livre de contexto.

Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem livre de contexto é livre de contexto.

Demonstração.

Seja A uma LLC. Por definição, seja $G = (V, \Sigma, R, S)$ uma GLC que a gera.

Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem livre de contexto é livre de contexto.

Demonstração.

Seja A uma LLC. Por definição, seja $G = (V, \Sigma, R, S)$ uma GLC que a gera.

Construa $G' = (V', \Sigma, R', S')$ em que

- $V' = V \cup \{S'\}$
- $R' = R \cup \{S' \to SS', S' \to \varepsilon\}$.

Claramente, $L(G') = L(G)^* = A^*$. C.Q.D.

Interseção

Teorema

LLCs não são fechadas sob interseção.

Interseção

Teorema

LLCs não são fechadas sob interseção.

Demonstração.

Seja $A_1 = \{0^n 1^n 2^i \colon n, i \geq 0\}$ e $A_2 = \{0^n 1^i 2^n \colon n, i \geq 0\}$.

Note que ambas são LLCs. (?????)

Interseção

Teorema

LLCs não são fechadas sob interseção.

Demonstração.

Seja $A_1 = \{0^n 1^n 2^i \colon n, i \geq 0\}$ e $A_2 = \{0^n 1^i 2^n \colon n, i \geq 0\}$.

Note que ambas são LLCs. (?????)

Note ainda que $A_1 \cap A_2 = \{0^n 1^n 2^n \colon n \geq 0\} = C$.

Mas C não é LLC. spoiler! C.Q.D.

Complemento

Teorema

LLCs não são fechadas sob complemento.

Complemento

Teorema

LLCs não são fechadas sob complemento.

Demonstração.

Suponha que LLCs sejam fechadas sob complemento e sejam A e B duas LLCs quaisquer.

Complemento

Teorema

LLCs não são fechadas sob complemento.

Demonstração.

Suponha que LLCs sejam fechadas sob complemento e sejam A e B duas LLCs quaisquer.
Então $C = \overline{A} \cup \overline{B}$ é uma LLC.

Complemento

Teorema

LLCs não são fechadas sob complemento.

Demonstração.

Suponha que LLCs sejam fechadas sob complemento e sejam A e B duas LLCs quaisquer.

Então $C = \overline{A} \cup \overline{B}$ é uma LLC.

E note que $\overline{C}$ também é LLC.

Complemento

Teorema

LLCs não são fechadas sob complemento.

Demonstração.

Suponha que LLCs sejam fechadas sob complemento e sejam A e B duas LLCs quaisquer.

Então $C = \overline{A} \cup \overline{B}$ é uma LLC.

E note que $\overline{C}$ também é LLC.

Mas $\overline{C} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$, uma contradição. C.Q.D.