

# Disciplinas MCTA015-13 / CCM-104

## Linguagens Formais e Autômatas / Teoria da Computação

---

**Profa. Carla Negri Lintzmayer**

`carla.negri@ufabc.edu.br`

`www.professor.ufabc.edu.br/~carla.negri`

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC



Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre LR's: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

## Propriedades de linguagens regulares

---

Sejam  $A$  e  $B$  linguagens.

São operações regulares:

- **União:**  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Concatenação:**  $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
- **Estrela:**  $A^* = \{x_1x_2 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ e } x_i \in A\}$

## Operações regulares

Considere  $L = \{1, 01, 010\}$  e  $M = \{\varepsilon, 11\}$ .

$$L \cup M = \{\varepsilon, 1, 01, 11, 010\}$$

$$LM = \{1, 111, 01, 0111, 010, 01011\}$$

$$ML = \{1, 01, 010, 111, 1101, 11010\}$$

$$L^* = \{\varepsilon, 1, 11, 101, 010, 0101, 1010, 11101010, \dots\}$$

## Propriedades das operações regulares

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  linguagens regulares. Valem as seguintes propriedades:

1.  $A \cup B = B \cup A$  (comut.)
2.  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$  (assoc.)
3.  $A(BC) = (AB)C$  (assoc.)
4.  $A(B \cup C) = AB \cup AC$  (distr.)
5.  $(A \cup B)C = AC \cup BC$  (distr.)
6.  $\emptyset A = A\emptyset = \emptyset$  (aniq.)
7.  $\{\varepsilon\}A = A\{\varepsilon\} = A$  (ident.)
8.  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$  (ident.)
9.  $A \cup A = A$  (idemp.)
10.  $(A^*)^* = A^*$  (fecham.)
11.  $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$  (fecham.)
12.  $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$  (fecham.)

- Uma coleção de objetos é *fechada sob* alguma operação se, aplicando-se essa operação a membros da coleção, recebe-se um objeto ainda na coleção.
  - Por exemplo, números naturais são fechados sob a operação de soma.
  - Por exemplo, números naturais não são fechados sob a operação de divisão.

As linguagens regulares são fechadas sob:

1. União (teorema a seguir)
2. Concatenação (teorema a seguir)
3. Estrela (teorema a seguir)
4. Interseção (exercício na lista 1)
5. Complemento (respondido na lista 1)
6. Diferença (exercício)
7. Reverso (exercício na lista 1)



## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas linguagens regulares.

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  que as reconhecem, respectivamente.

## Teorema

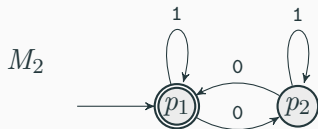
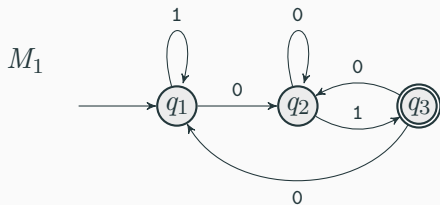
*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  que as reconhecem, respectivamente.

A ideia é criar um AFD que reconhece  $A_1 \cup A_2$  fazendo-o simular  $M_1$  e  $M_2$  simultaneamente.

Para isso, o AFD precisa lembrar qual o estado ativo em  $M_1$  e qual o estado ativo em  $M_2$  em cada momento da entrada.



## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Seja  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  em que

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para  $(r_1, r_2) \in Q$  e  $x \in \Sigma$ ,  
$$\delta((r_1, r_2), x) = ( \delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x) )$$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Seja  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  em que

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para  $(r_1, r_2) \in Q$  e  $x \in \Sigma$ ,  
$$\delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x))$$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

Resta mostrar que  $L(M) = A_1 \cup A_2$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$



## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Agora, suponha que  $\omega \in L(M)$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Agora, suponha que  $\omega \in L(M)$ .

Então  $\hat{\delta}(q_0, \omega) \in F = \{(r_1, r_2) : r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Agora, suponha que  $\omega \in L(M)$ .

Então  $\hat{\delta}(q_0, \omega) \in F = \{(r_1, r_2) : r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$ .

Assim, digamos que  $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Agora, suponha que  $\omega \in L(M)$ .

Então  $\hat{\delta}(q_0, \omega) \in F = \{(r_1, r_2) : r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$ .

Assim, digamos que  $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$ .

Por  $\star$ , vale que  $\hat{\delta}_1(q_1, \omega) = t_1$  e  $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = t_2$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Agora, suponha que  $\omega \in L(M)$ .

Então  $\hat{\delta}(q_0, \omega) \in F = \{(r_1, r_2) : r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$ .

Assim, digamos que  $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$ .

Por  $\star$ , vale que  $\hat{\delta}_1(q_1, \omega) = t_1$  e  $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = t_2$ .

Por definição de  $F$ , temos  $t_1 \in F_1$  ou  $t_2 \in F_2$ , ou seja,  $\omega \in A_1$  ou  $\omega \in A_2$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Por fim, suponha que  $\omega \in A_1 \cup A_2$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Por fim, suponha que  $\omega \in A_1 \cup A_2$ .

Denotando  $t_1 = \hat{\delta}_1(q_1, \omega)$  e  $t_2 = \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = t_2$ , sabemos que  $t_1 \in F_1$  ou  $t_2 \in F_2$ .



## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Por fim, suponha que  $\omega \in A_1 \cup A_2$ .

Denotando  $t_1 = \hat{\delta}_1(q_1, \omega)$  e  $t_2 = \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = t_2$ , sabemos que  $t_1 \in F_1$  ou  $t_2 \in F_2$ .

Por  $\star$ , vale que  $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$ .

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j. (\text{ex.}) \quad \star$$

Por fim, suponha que  $\omega \in A_1 \cup A_2$ .

Denotando  $t_1 = \hat{\delta}_1(q_1, \omega)$  e  $t_2 = \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = t_2$ , sabemos que  $t_1 \in F_1$  ou  $t_2 \in F_2$ .

Por  $\star$ , vale que  $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$ .

Então por definição de  $F$ , temos  $(t_1, t_2) \in F$ , de onde vemos que  $\omega \in L(M)$ . □

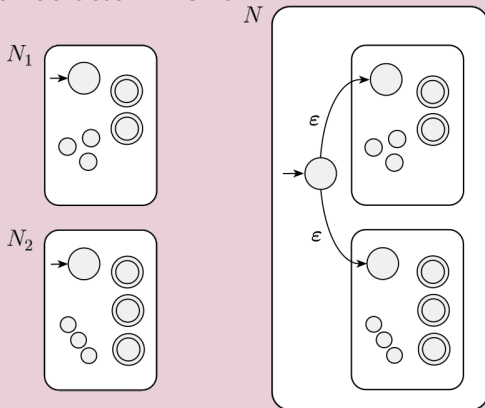
# União - Outra demonstração

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Ideia da demonstração.

Criar um único AFN que reconhece  $A_1 \cup A_2$  se aproveitando da onisciência do não determinismo:



### Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

### Demonstração.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas linguagens regulares. Sejam  $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  AFNs que as reconhecem, respectivamente.

## Teorema

*A união de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas linguagens regulares. Sejam  $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  AFNs que as reconhecem, respectivamente.

Construa  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$

- Para  $q \in Q$  e  $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ,  $\delta(q, x) = \begin{cases} \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, x) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } x = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } x \neq \varepsilon \end{cases}$

- $F = F_1 \cup F_2$

Note que  $L(N) = A_1 \cup A_2$  porque ...



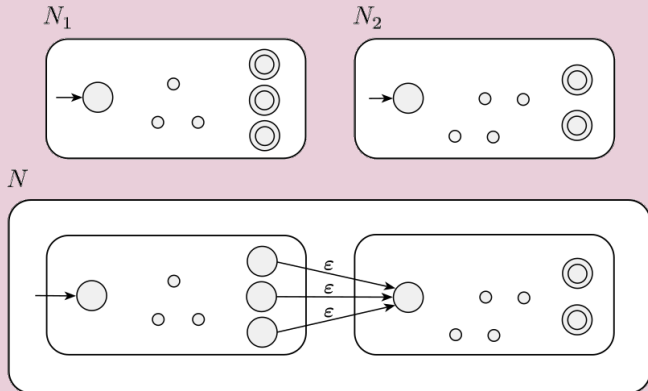
# Concatenação

## Teorema

*A concatenação de duas linguagens regulares é regular.*

## Ideia da demonstração.

Criar um único AFN que reconhece  $A_1A_2$  se aproveitando da onisciência do não determinismo:



## Teorema

*A concatenação de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas linguagens regulares. Sejam  $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  AFNs que as reconhecem, respectivamente.

## Teorema

*A concatenação de duas linguagens regulares é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas linguagens regulares. Sejam  $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  AFNs que as reconhecem, respectivamente.

Construa  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  em que

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- Para  $q \in Q$  e  $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ,
$$\delta(q, x) = \begin{cases} \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, x) & \text{se } q \in F_1 \text{ e } x \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, x) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } x = \varepsilon \\ \delta_2(q, x) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$
- $q_0 = q_1$
- $F = F_2$

Note que  $L(N) = A_1 A_2$  porque ...



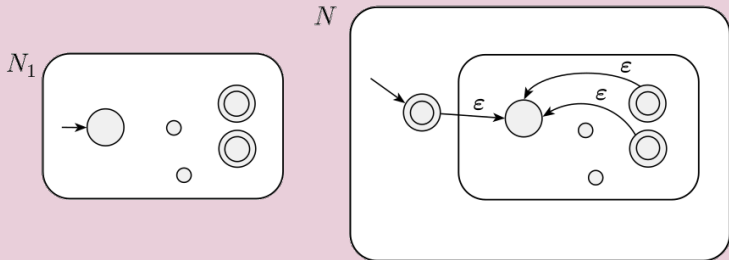


## Teorema

*A estrela de uma linguagem regular é regular.*

## Ideia da demonstração.

Criar um único AFN que reconhece  $A^*$  se aproveitando da onisciência do não determinismo:



## Teorema

*A estrela de uma linguagem regular é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A$  uma linguagem regular. Seja  $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  um AFN que a reconhece.

## Teorema

*A estrela de uma linguagem regular é regular.*

## Demonstração.

Sejam  $A$  uma linguagem regular. Seja  $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  um AFN que a reconhece.

Seja  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1$
- Para  $q \in Q$  e  $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ,
$$\delta(q, x) = \begin{cases} \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } x \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, x) \cup \{q_1\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } x = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } x = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } x \neq \varepsilon \end{cases}$$
- $F = \{q_0\} \cup F_1$

Note que  $L(N) = A^*$  porque ...



Por que a demonstração do fechamento sob estrela precisou criar um estado inicial novo?

Por que a demonstração do fechamento sob estrela precisou criar um estado inicial novo?

