Lista 2: Linguagens livres de contexto

1. Considere a gramática livre de contexto $G = (\{E, T, F\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{+}, \times, \mathtt{(}, \mathtt{)}\}, R, E)$ em que R é dada por

$$E \to E\mathtt{+}T \mid T$$
$$T \to T\times F \mid F$$
$$F \to \mathtt{(}E\mathtt{)} \mid \mathtt{a}$$

Apresente 5 cadeias de comprimento pelo menos 6 que são geradas por G. Para cada uma delas, apresente uma derivação e uma árvore sintática (árvore de derivação).

2. Considere a gramática livre de contexto G definida pelas seguintes regras de substituição:

$$S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{b}S\mathtt{a} \mid S\mathtt{c} \mid \varepsilon$$

Considere também a linguagem $B = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{a}} = |\omega|_{\mathtt{b}}\}$. Prove que $L(G) \neq B$.

3. Descreva a linguagem de cada uma das gramáticas a seguir (não há necessidade de justificar):

   (a) G_1 $S \to S\mathtt{a}S \mid \mathtt{a}$
   (b) G_2 $S \to SS \mid \varepsilon$
   (c) G_3 $S \to SS \mid \mathtt{a}$
   (d) G_4 $S \to SS \mid \mathtt{aa}$
   (e) G_5 $S \to S\mathtt{a} \mid \mathtt{a}$
   (f) G_6 $S \to \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{aa} \mid \mathtt{a}$
   (g) G_7 $S \to SAS \mid \varepsilon$

4. Construa gramáticas livres de contexto para as seguintes linguagens, justificando sua resposta.

   (a) $\{\omega \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \colon |\omega| \text{ é ímpar}\}$
   (b) $\{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{a}} > |\omega|_{\mathtt{b}}\}$
   (c) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^{3m+2n+1} \colon m, n \geq 0\}$
   (d) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \colon n > m + k\}$
   (e) $\{\omega \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{0}} \text{ é par e } |\omega|_{\mathtt{1}} \text{ é par}\}$
   (f) o complemento da linguagem $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \colon n \geq 0\}$
   (g) $\{\omega \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \colon |\omega| \text{ é ímpar e o símbolo do meio de } \omega \text{ é um } \mathtt{0}\}$
   (h) $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \colon i = j \text{ ou } j = k \text{ onde } i, j, k \geq 0\}$

(i) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^p\mathtt{d}^q : m+n \geq p+q\}$

(j) $\{\omega \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* : \omega$ começa em $\mathtt{1}$ e representa um número múltiplo de 5 em binário$\}$

(k) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^{2n} : n \geq 0\}$

(l) o complemento da linguagem $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^{2n} : n \geq 0\}$

(m) $\{\alpha\#0^n : \alpha \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ e $n = |\alpha|_0\}$

(n) $\{\alpha\beta : \alpha, \beta \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$ e $\alpha \neq \beta$ e $|\alpha| = |\beta|\}$

5. Considere a gramática livre de contexto G definida pelas seguintes regras de substituição:

$$S \to \mathtt{a}S \mid S\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b}$$

Prove por indução no comprimento da cadeia que nenhuma cadeia em $L(G)$ contém $\mathtt{ba}$ como subcadeia.

6. Considere a gramática livre de contexto G definida pelas seguintes regras de substituição:

$$S \to SS \mid \mathtt{(}S\mathtt{)} \mid \varepsilon$$

Seja B a linguagem dos parênteses balanceados. A demonstração a seguir está tentando mostrar que $L(G) = B$, porém algumas argumentações estão faltando (marcadas com $\star$). Complete-as corretamente.

($\Longrightarrow$) Suponha que $\omega \in L(G)$. Vamos provar por indução no número n de passos da derivação de ω que $\omega \in B$ também.
Base: $n = 1$. A única derivação com 1 passo é $S \Rightarrow \varepsilon$, porque $\star$. E $\varepsilon \in B$, porque $\star$.
Considere uma cadeia ω cuja derivação leva $n > 1$ passos e suponha que para qualquer cadeia α tal que $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ em menos de n passos, então $\alpha \in B$.
A derivação $S \overset{*}{\Rightarrow} \omega$ ou é da forma $S \Rightarrow SS \overset{*}{\Rightarrow} \omega$ ou da forma $S \Rightarrow \mathtt{(}S\mathtt{)} \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, porque $\star$.
No primeiro caso, $\omega = \alpha\beta$, para cadeias α e β tais que $S \Rightarrow \alpha$ e $S \Rightarrow \beta$. Como $\alpha \in B$ porque $\star$ e $\beta \in B$ porque $\star$, então $\omega \in B$ porque $\star$.
No segundo caso, $\omega = \mathtt{(}\beta\mathtt{)}$ para alguma cadeia α tal que $S \Rightarrow \alpha$. Como $\alpha \in B$ porque $\star$, então $\omega \in B$ porque $\star$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\omega \in B$. Vamos provar por indução no comprimento n de ω que $\omega \in L(G)$ também.
Base: $n = 0$. A única cadeia com comprimento 0 em B é ε porque $\star$. E $\varepsilon \in L(G)$ porque $\star$.
Considere uma cadeia $\omega \in B$ com comprimento $n > 1$ e suponha que qualquer cadeia $\alpha \in B$ com comprimento menor do que n está em $L(G)$.
A cadeia ω é da forma $\mathtt{(}\beta\mathtt{)}\gamma$, onde $\mathtt{(}\beta\mathtt{)}$ é o menor prefixo de ω que está em B e γ é o restante porque $\star$.
Como $\beta \in B$ porque $\star$, $\gamma \in B$ porque $\star$, então $\beta \in L(G)$ e $\gamma \in L(G)$ porque $\star$.
Logo, $\omega \in L(G)$ porque $\star$.

7. Construa autômatos com pilha para as seguintes linguagens. Justifique corretamente a descrição instantânea em cada estado (não é necessário formalizar as demonstrações).

(a) $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^{n+m} : n, m \geq 0\}$

(b) $\{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n : m \geq n\}$

(c) $\{\omega \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* : |\omega|$ é ímpar$\}$

(d) $\{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \colon m < n\}$

(e) $\{\omega \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{0}} = 2|\omega|_{\mathtt{1}}\}$

(f) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \colon n > m \text{ ou } n > k\}$

8. Prove que as seguintes linguagens não são livres de contexto:

   (a) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \colon n \geq 0\}$

   (b) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^{2n}\mathtt{0}^n \colon n \geq 0\}$

   (c) $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^k\mathtt{c}^n\mathtt{d}^k \colon k, n \geq 0\}$

   (d) $\{\mathtt{0}^{n^2} \colon n \geq 0\}$

   (e) $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{a}^m\mathtt{b}^m \colon n, m \geq 0 \text{ e } n \neq m\}$

   (f) $\{\omega \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{a}} = |\omega|_{\mathtt{b}} = |\omega|_{\mathtt{c}}\}$

9. Prove que se uma linguagem L é livre de contexto, então $L^R = \{\omega^R \colon \omega \in L\}$ também é livre de contexto (ω^R é o reverso da cadeia ω).

(POSCOMP 2018)

QUESTÃO 39 – Considere os seguintes formalismos:

I. Autômatos finitos.
II. Autômatos finitos com uma pilha.
III. Autômatos finitos com duas pilhas.

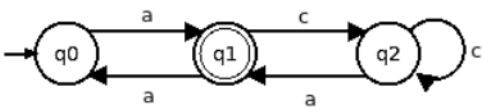
Quais contêm SOMENTE os formalismos nos quais a variante não determinística reconhece o mesmo conjunto de linguagens que a respectiva versão determinística?

A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas I e III.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.

QUESTÃO 40 – Considere a gramática G descrita a seguir: conjunto de terminais {a,c}, conjunto de não terminais {S,A}, símbolo inicial S e contendo as produções abaixo:

S -> AcS
S -> A
A -> aAa
A -> a

Considere também o autômato finito A sobre o alfabeto {a,c}, com conjunto de estados {q0,q1,q2} — dos quais q0 é inicial e q1 é final — e com função de transição de estados determinada pelo seguinte grafo:



Seja L(G) a linguagem gerada pela gramática G e L(A) a linguagem reconhecida pelo autômato A, assinale a alternativa correta.

A) L(G) é regular e L(A) é subconjunto próprio de L(G).
B) L(G) não é regular e L(A) é subconjunto próprio de L(G).
C) L(A) = L(G).
D) L(G) é regular e L(G) é subconjunto próprio de L(A).
E) L(G) não é regular e L(G) é subconjunto próprio de L(A).

(POSCOMP 2019)

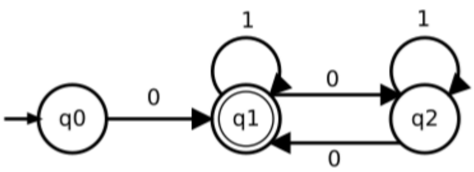
QUESTÃO 41 – Considere L1 e L2 duas linguagens formais sobre o alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$, descritas como segue:

$L1 = \{ ww \mid w \in \Sigma^* \}$

$L2 = \{ 0^a1^b \mid a>0, b>0, b \text{ ímpar} \}$

Na descrição acima, justaposição significa concatenação de palavras e Σ^* denota o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto Σ.

Seja A1 o autômato finito sobre alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ descrito pelo seguinte diagrama de transição de estados:



Denotemos por ACEITA(A1) o conjunto de palavras aceitas por A1.

Nesse sentido, considere as seguintes afirmações:

I. L1 é uma linguagem regular.
II. L2 é uma linguagem livre de contexto.
III. ACEITA(A1) = $\{ w \mid w \in \Sigma^*$ e w possui um número ímpar de zeros $\}$.

Quais estão corretas?

A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas I e III.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.