TEOREMA: Toda linguagem regular é livre de contexto.

DEMONSTRAÇÃO: Seja A uma linguagem regular e $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que a reconhece.

Construa a gramática $G = (Q, \Sigma, R, q_0)$ em que R possui uma regra $X \to aY$ para cada transição $\delta(X, a) = Y$ e uma regra $X \to \varepsilon$ para cada $X \in F$. Claramente G é GLC.

Vamos agora mostrar que $L(G) = L(M) = A$.

Primeiro seja $w \in A$, com $w = x_1 x_2 \dots x_n$ onde $x_i \in \Sigma$.

Como $w \in A$, existe sequência $(r_0, r_1, \dots, r_n)$ de estados tais que $r_0 = q_0$, $r_n \in F$ e $r_{i+1} = \delta(r_i, x_{i+1})$ $\forall\, 0 \leq i < n$.

Mas então $q_0 \Rightarrow x_1 r_1 \Rightarrow x_1 x_2 r_2 \overset{*}{\Rightarrow} x_1 x_2 \dots x_n r_n \Rightarrow x_1 x_2 \dots x_n$ é uma derivação válida para G, o que significa que $w \in L(G)$.

Agora seja $w \in L(G)$, com $w = x_1 x_2 \dots x_n$ e $x_i \in \Sigma$.

Como $w \in L(G)$, então $q_0 \overset{*}{\Rightarrow} w$, ou seja, existem cadeias de $(\Sigma \cup Q)^*$ $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ tais que $\alpha_0 = q_0$ e

$$\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_k \Rightarrow w$$

Por construção, todas as regras de G são da forma $X \to aY$ ou $Z \to \varepsilon$, com $a \in \Sigma$, $X, Y, Z \in Q$ e $Z \in F$. Então cada α_i só pode ser da forma $\lambda x_i V$, com $\lambda \in \Sigma^*$ e $V \in Q$. Logo, $k = n$.

Vamos denotar por r_i a variável final de α_i $(\alpha_i = \lambda x_i r_i)$.

Assim, $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ porque a regra $r_i \to x_{i+1} r_{i+1}$ foi aplicada, para todo $0 \leq i < n$, e $\alpha_n \Rightarrow w$ por aplicação de $r_n \to \varepsilon$.

Isso significa que existem transições $\delta(r_i, x_{i+1}) = r_{i+1}$ em M e que r_n é estado final.

Logo, $(q_0, r_1, \dots, r_n)$ é uma sequência válida de computação em M e portanto $w \in L(M) = A$.

CQD