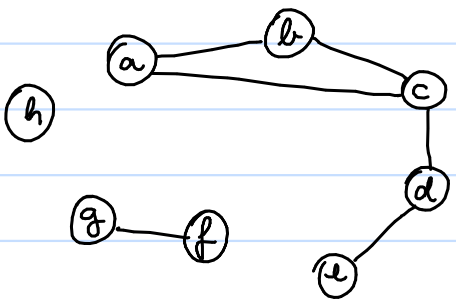
Grafos

DEFINIÇÃO: Um grafo G é um par de conjuntos (V,E) onde V é um conj. de elementos chamados vértices e E é um conj. de elem. chamados de arestas, sendo que cada aresta é um par de vértices.

→ Exemplo: H com $V(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
e $E(H) = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{f,g\}\}$

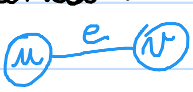


ou ba

Obs: essa definição é de grafos simples
Obs 2: $E = \{ab, ac, bc, cd, de, fg\}$.
Obs 3: Usaremos $V(\cdot)$ e $E(\cdot)$

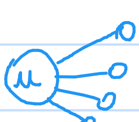
Terminologias básicas em grafos

→ Se $e = uv$ é uma aresta de um grafo G, então:



↳ u e v são vizinhos / adjacentes
↳ u e v são extremos de e
↳ e incide em u e em v

→ Dado $u \in V(G)$:



↳ o grau de u é o nº de arestas incidentes a u $(d_G(u))$
↳ a vizinhança de u é o conj. de vizinhos de u $(N_G(u))$

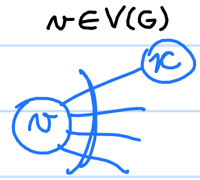
→ Dado um grafo G:
↳ o grau mínimo é $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}$
↳ o grau máximo é $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$

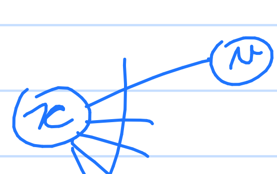
O resultado mais básico

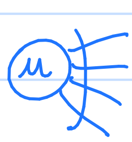
TEOREMA DO APERTO DE MÃOS: Para todo grafo G vale que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

PROVA:





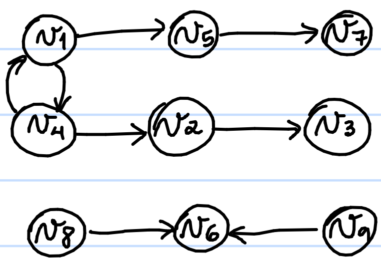


cada aresta é contada duas vezes

Digrafos

DEFINIÇÃO: Um digrafo D é um par de conjuntos (V,E) onde V é um conj. de elementos chamados vértices e E é um conj. de elem. chamados de arcos (arestas), sendo que cada arco é um par ordenado de vértices.

→ Exemplo: $H = (V,E)$ com $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_9\}$ e $E = \{(v_1,v_5), (v_2,v_3), (v_1,v_4), (v_4,v_2), (v_4,v_1), (v_5,v_7), (v_8,v_6), (v_9,v_6)\}$.

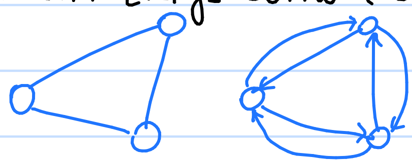


Obs: essa definição é de digrafo simples

Obs 2: $(x,y) \neq (y,x)$. $E = \{v_1v_5, v_2v_3, \ldots\}$

Obs 3: Usaremos $V(\cdot)$ e $E(\cdot)$

→ Todo grafo é um digrafo (pensamos em $\{x,y\}$ como (x,y) e (y,x)).



Terminologias básicas em digrafos

→ Se $e = uv$ é um arco de um digrafo D, então:

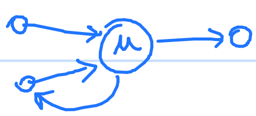
↳ u é cabeça e v é cauda

↳ e sai de u e entra em v

→ Dado $u \in V(D)$:

↳ o grau de entrada de u é o nº de arcos que entram em u $(d_D^-(u))$ e o grau de saída é o nº de arcos que saem de u $(d_D^+(u))$

↳ a vizinhança de entrada de u é o conj. de vértices extremos dos arcos que entram em u $(N_D^-(u))$ e a vizinhança de saída é o conj. de vértices extremos dos arcos que saem de u, exceto por u $(N_D^+(u))$.



TEOREMA DO APERTO DE MÃOS: Para todo digrafo D vale que

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E(G)|.$$

Grafos e dígrafos ponderados

→ Podemos associar valores (pesos) a vértices e/ou arestas dos (di)grafos.
- ↳ $w: V(G) \to \mathbb{N}$
- ↳ $w: E(G) \to \mathbb{N}$

Subgrafos

→ Dados grafos H e G, H é subgrafo de G, denotado $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Passeios

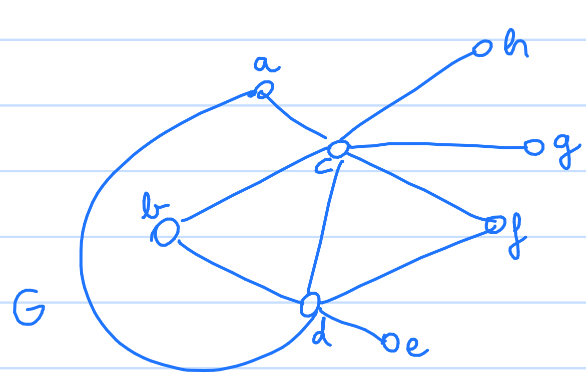
→ Uma sequência de vértices $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ é um passeio de um grafo G se $v_i \in V(G)$ para todo $0 \leq i \leq k$ e $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $0 \leq i \leq k-1$.

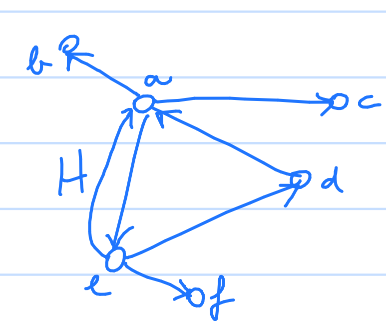
→ comprimento = nº de arestas

→ aberto: se $v_0 \neq v_k$
fechado: se $v_0 = v_k$.
v_0 e v_k são extremos e $v_1, \dots, v_{k-1}$ são vértices internos.

→ caminho: passeio que não repete vértices.
ciclo: passeio fechado que não repete vértices internos.

→ uv-caminho: caminho de u até v





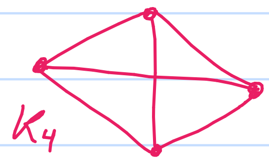
$W = (a, c, g, c, f, d)$
$W_2 = (a, c, b, d, c, a)$
$W_3 = (a, d)$ } caminhos
$W_4 = (a)$
$C = (a, d, c, a)$ ciclo

} passeios

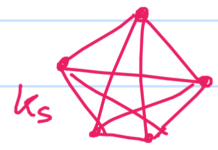
$W = (a, b)$ } caminho
$W_1 = (a, e, d, a, c)$
$C = (a, e, a)$ } ciclos
$C_2 = (a, e, d, a)$

} passeios

Classes de grafos



→ Completos: grafos K_n com $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
e $E(K_n) = \{xy : x, y \in V(K_n)\}$
↪ $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$



→ Fixado número n de vértices, todo grafo com n vértices é subgrafo de um grafo completo
Para todo G, $|E(G)| \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
⇒ $|E(G)|$ é $O(|V(G)|^2)$

Conexidade em grafos

→ Um grafo G é conexo se existe uv-caminho para todo $u, v \in V(G)$.
Caso contrário, G é desconexo e consiste de vários componentes conexos, que são subgrafos conexos maximais.
↪ com relação a propriedade
$H \subseteq G$ é maximal com relação à propriedade X se não existe $H' \subseteq G$ com essa propriedade X e $H \subsetneq H'$

Distância em grafos / digrafos

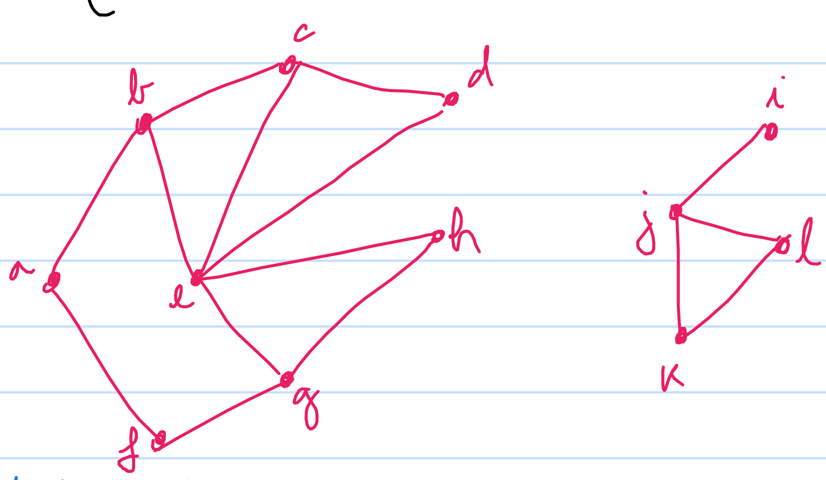
→ Dados um (di)grafo G e dois vértices $u, v \in V(G)$:

$$\text{dist}_G(u,v) = \begin{cases} \text{comprimento de um } uv\text{-caminho de menor compr.} & \text{se há } uv\text{-cam.} \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

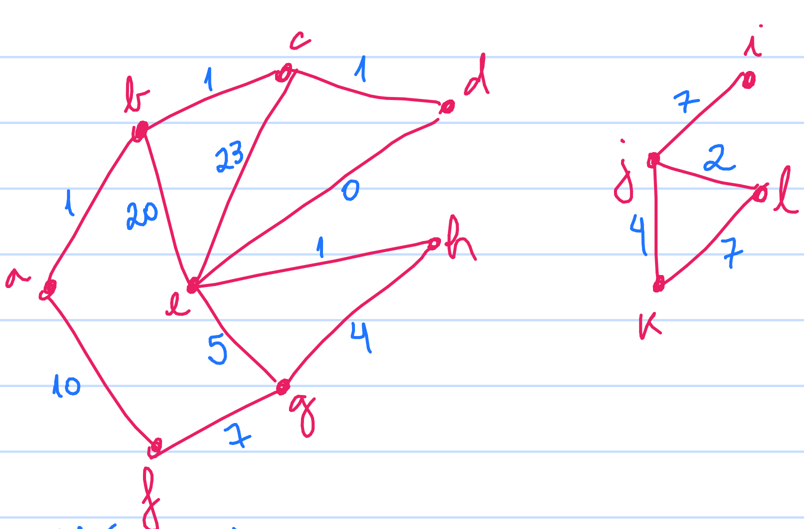
Distância em grafos / digrafos ponderados

→ Dados um (di)grafo G, uma função $w : E(G) \to \mathbb{R}$ e dois vértices $u, v \in V(G)$:

$$\text{dist}^w_G(u,v) = \begin{cases} \text{peso de um } uv\text{-caminho de menor peso} & \text{se há } uv\text{-cam.} \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$



$\text{dist}_G(a, b) = 1$
$\text{dist}_G(a, h) = 3$
$\text{dist}_G(h, j) = \infty$

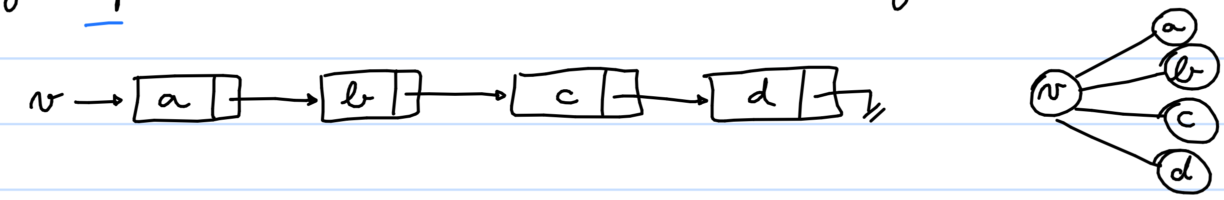


$\text{dist}^w_G(a, h) = 4$

Representação de grafos

→ Assuma que o conjunto de vértices é $\{1, 2, \dots, n\}$.

→ Na representação por listas de adjacências há uma lista ligada para cada vértice, contendo os vizinhos do vértice.

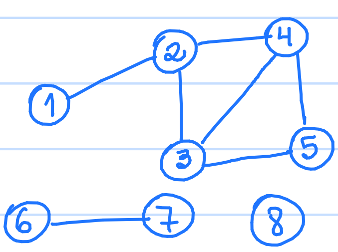


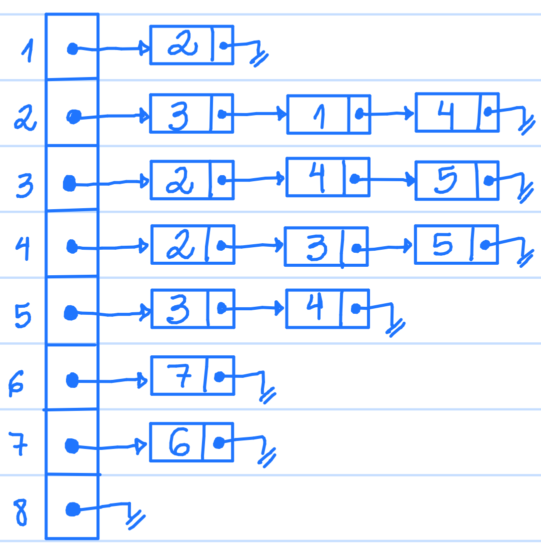
↳ Então uma lista tem $d(v)$ elementos

↳ O espaço total é $\Theta(|V(G)|) + \sum_{v \in V(G)} \Theta(d(v)) = \Theta(|V(G)| + |E(G)|)$

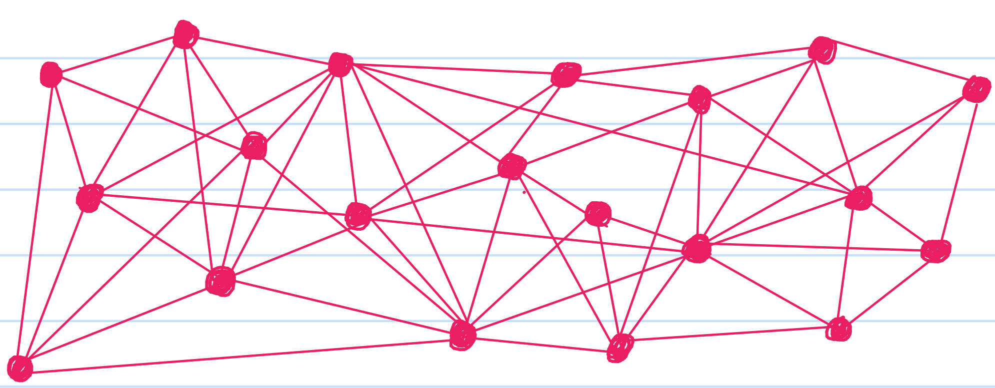
→ Na representação por matriz de adjacências, o grafo é dado por uma matriz M com $|V(G)|$ linhas e $|V(G)|$ colunas, com $M[i][j] = 1$ se $ij \in E(G)$ e $M[i][j] = 0$ caso contrário.

↳ O espaço total é $\Theta(|V(G)|^2)$



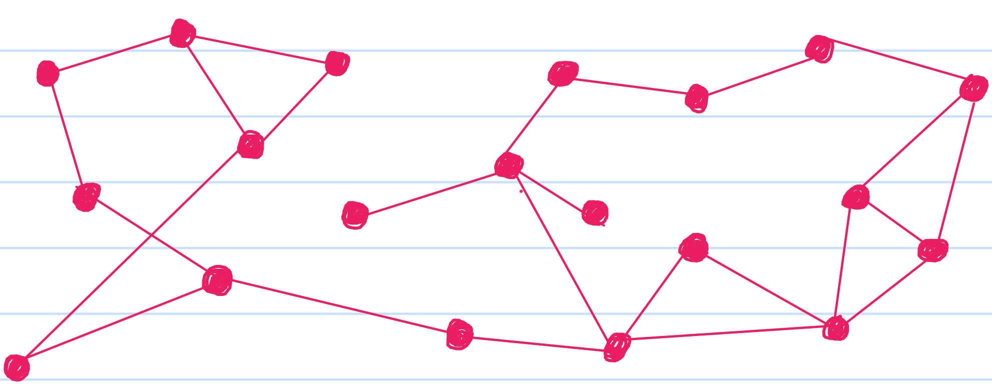


	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1	0	0	0
5	0	0	1	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0



denso

arestas $\Rightarrow n^2$



esparso

Pseudocódigos e análise de algoritmos em grafos

→ Vamos resolver o problema de calcular o grau de um vértice.

```
GRAU (G, v)
    Devolve d_G(v)
```

ou

```
GRAU (G, v)
    grau = 0
    Para cada u ∈ N_G(v)
        grau = grau + 1
    Devolve grau
```

"Realidade":

```
GRAU (M, n, v)                          Θ(n)
    grau = 0
    Para u = 1 até n
        Se M[v][u] == 1
            grau = grau + 1
    Devolve grau
```

```
GRAU (L, n, v)                          O(n)
    grau = 0
    atual = L[v]                        Θ(d(v))
    Enquanto atual ≠ NULL
        grau = grau + 1
        atual = atual.prox
    Devolve grau
```

→ Vamos agora encontrar o grau máximo de um grafo $(\Delta(G))$

$n = |V(G)|$ $m = |E(G)|$

```
GRAU_MAXIMO (G)
    max = 0                  → Θ(1)
    Para cada v ∈ V(G)       → Θ(n)
        Se d_G(v) > max      } para cada v,
            max = d_G(v)     }   MATRIZ: Θ(n)
                             }   LISTA: Θ(d(v))
    Devolve max → Θ(1)
```

$\sum_{v \in V(G)}$ ☆

☆

MATRIZ: $\Theta(1) + \Theta(n) + \sum_{v \in V(G)} \Theta(n) = \Theta(n) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$

LISTAS: $\Theta(1) + \Theta(n) + \sum_{v \in V(G)} \Theta(d(v)) = \Theta(n) + \Theta(m) = \Theta(n+m)$

LISTAS: $\Theta(1) + \Theta(n) + \sum_{v \in V(G)} O(n) = \Theta(n) + O(n^2) = O(n^2)$

para $i = 1$ até n $(i \leq n,\ i = i+1)$