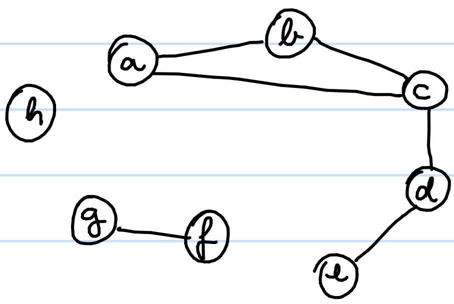
Grafos

DEFINIÇÃO: Um grafo G é um par de conjuntos (V,E) onde V é um conj. de elementos chamados vértices e E é um conj. de elem. chamados de arestas, sendo que cada aresta é um par de vértices

→ Exemplo: $H = (V,E)$ com $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
e $E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{f,g\}\}$



Obs: essa definição é de grafos simples
Obs 2: $E = \{ab, ac, bc, cd, de, fg\}$.
Obs 3: Usaremos $V(\cdot)$ e $E(\cdot)$

Terminologias básicas em grafos

→ Se $e = uv$ é uma aresta de um grafo G, então:
- ↳ u e v são vizinhos / adjacentes
- ↳ u e v são extremos de e
- ↳ e incide em u e em v

→ Dado $u \in V(G)$:
- ↳ o grau de u é o nº de arestas incidentes a u $(d_G(u))$
- ↳ a vizinhança de u é o conj. de vizinhos de u $(N_G(u))$

→ Dado um grafo G:
- ↳ o grau mínimo é $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}$
- ↳ o grau máximo é $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$

O resultado mais básico

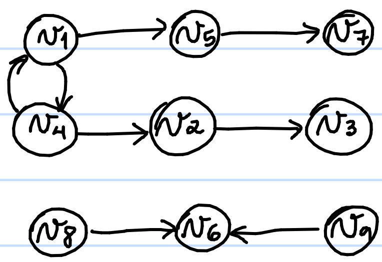
TEOREMA DO APERTO DE MÃOS: Para todo grafo G vale que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Digrafos

DEFINIÇÃO: Um digrafo D é um par de conjuntos (V,E) onde V é um conj. de elementos chamados vértices e E é um conj. de elem. chamados de arcos, sendo que cada arco é um par ordenado de vértices.

→ Exemplo: $H = (V,E)$ com $V = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$ e $E = \{(v_1,v_5), (v_2,v_3), (v_1,v_4), (v_4,v_2), (v_4,v_1), (v_5,v_7), (v_8,v_6), (v_9,v_6)\}$.



Obs: essa definição é de digrafo simples

Obs 2: $(x,y) \neq (y,x)$. $E = \{v_1v_5, v_2v_3, \dots\}$

Obs 3: Usaremos $V(\cdot)$ e $E(\cdot)$

→ Todo grafo é um digrafo (pensamos em $\{x,y\}$ como (x,y) e (y,x)).

Terminologias básicas em digrafos

→ Se $e = uv$ é um arco de um digrafo D, então:
- ↳ u é cabeça e v é cauda
- ↳ e sai de u e entra em v

→ Dado $u \in V(D)$:
- ↳ o grau de entrada de u é o nº de arcos que entram em u $(d_D^-(u))$ e o grau de saída é o nº de arcos que saem de u $(d_D^+(u))$
- ↳ a vizinhança de entrada de u é o conj. de vértices extremos dos arcos que entram em u $(N_D^-(u))$ e a vizinhança de saída é o conj. de vértices extremos dos arcos que saem de u, exceto por u $(N_D^+(u))$.

TEOREMA DO APERTO DE MÃOS: Para todo digrafo D vale que

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E(G)|.$$

Grafos e digrafos ponderados

→ Podemos associar valores (pesos) a vértices e/ou arestas dos (di)grafos.

↳ $w: V(G) \to \mathbb{N}$

↳ $w: E(G) \to \mathbb{N}$

Subgrafos

→ Dados grafos H e G, H é subgrafo de G, denotado $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Passeios

→ Uma sequência de vértices $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ é um passeio de um grafo G se $v_i \in V(G)$ para todo $0 \leq i \leq k$ e $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $0 \leq i \leq k-1$.

→ comprimento = nº de arestas

→ aberto: se $v_0 \neq v_k$

fechado: se $v_0 = v_k$.

v_0 e v_k são extremos e $v_1, \dots, v_{k-1}$ são vértices internos.

→ caminho: passeio que não repete vértices.

ciclo: passeio fechado que não repete vértices internos.

→ uv-caminho: caminho de u até v

Classes de grafos

→ Completos: grafos K_n com $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
e $E(K_n) = \{xy : x, y \in V(K_n)\}$
↪ $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

→ Fixado número n de vértices, todo grafo com n vértices é subgrafo de um grafo completo
Para todo G, $|E(G)| \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Conexidade em grafos

→ Um grafo G é conexo se existe uv-caminho para todo $u, v \in V(G)$.
Caso contrário, G é desconexo e consiste de vários componentes conexos, que são subgrafos conexos maximais.

Distância em grafos / digrafos

→ Dados um (di)grafo G e dois vértices $u, v \in V(G)$:

$$\mathrm{dist}_G(u,v) = \begin{cases} \text{comprimento de um } uv\text{-caminho de menor compr.} & \text{se há } uv\text{-com.} \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Distância em grafos / digrafos ponderados

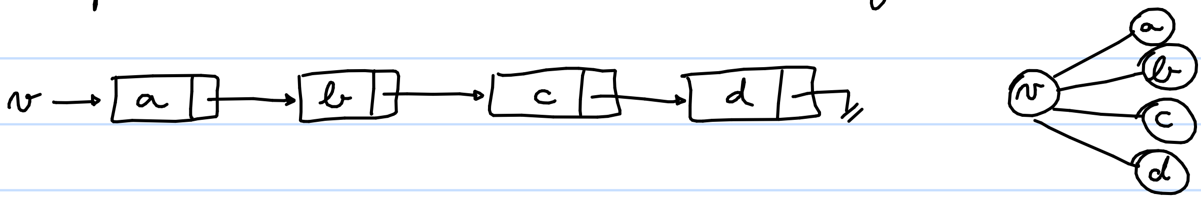
→ Dados um (di)grafo G, uma função $w: E(G) \to \mathbb{R}$ e dois vértices $u, v \in V(G)$:

$$\mathrm{dist}_G^w(u,v) = \begin{cases} \text{peso de um } uv\text{-caminho de menor peso} & \text{se há } uv\text{-com.} \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Representação de grafos

→ Assuma que o conjunto de vértices é $\{1, 2, \dots, n\}$.

→ Na representação por listas de adjacências há uma lista ligada para cada vértice, contendo os vizinhos do vértice.

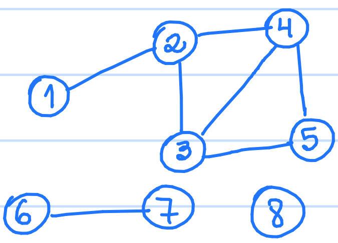


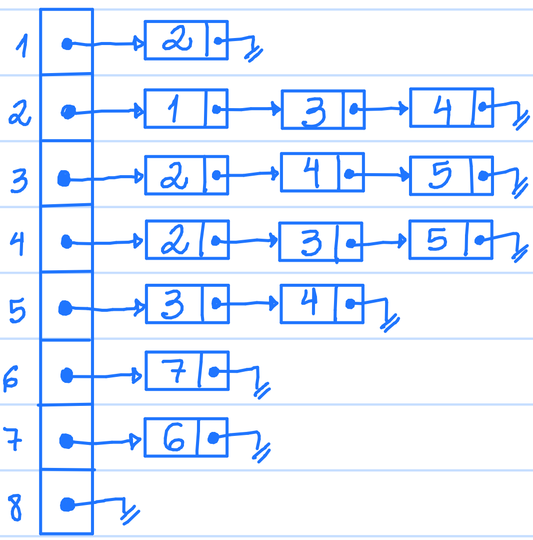
↳ Então uma lista tem $d(v)$ elementos

↳ O espaço total é $\Theta(|V(G)|) + \sum_{v \in V(G)} \Theta(d(v)) = \Theta(|V(G)| + |E(G)|)$

→ Na representação por matriz de adjacências, o grafo é dado por uma matriz M com $|V(G)|$ linhas e $|V(G)|$ colunas, com $M[i][j] = 1$ se $ij \in E(G)$ e $M[i][j] = 0$ caso contrário.

↳ O espaço total é $\Theta(|V(G)|^2)$





	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1	0	0	0
5	0	0	1	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Pseudocódigos e análise de algoritmos em grafos

→ Vamos resolver o problema de calcular o grau de um vértice.

```
GRAU (G, v)
    Devolve dG(v)
```

ou

```
GRAU (G, v)
    grau = 0
    Para cada u ∈ NG(v)
        grau = grau + 1
    Devolve grau
```

"Realidade":

```
GRAU (M, n, v)
    grau = 0
    Para u = 1 até |V(G)|
        Se M[v][u] == 1
            grau = grau + 1
    Devolve grau
```

$\Theta(n)$

```
GRAU (L, n, v)
    grau = 0
    atual = L[v]
    Enquanto atual ≠ NULL
        grau = grau + 1
        atual = atual.prox
    Devolve grau
```

$\Theta(d(v))$, $O(m)$

→ Vamos agora encontrar o grau máximo de um grafo ($\Delta(G)$)

```
GRAU_MAXIMO (G)
    max = 0
    Para cada v ∈ V(G)          → Θ(n)
        Se dG(v) > max          → Θ(n)   ou   Θ(d(v))
            max = dG(v)
    Devolve max
```

$$\sum_{v \in V(G)} \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

$$\sum_{v \in V(G)} \Theta(d(v)) = \Theta(m)$$

MATRIZ: $\Theta(n^2)$

LISTAS: $\Theta(n+m)$

Árvores

→ Se há n componentes conexos com um vértice cada, qual o menor número de arestos a serem acrescentados para ficar com uma única componente conexa?
↳ $n-1$

→ Árvore: grafo conexo e sem ciclos.
↳ folha: vértices de grau 1.

→ floresta: grafo que não contém ciclos.

→ Podemos enraizar uma árvore em qualquer um de seus vértices pois não há vértices especiais

TEOREMA: Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) G é uma árvore
2) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.
3) G é conexo e para toda $e \in E(G)$, $G-e$ é desconexo.
4) G é conexo e $|E(G)| = |V(G)| - 1$.
5) G não tem ciclos e $|E(G)| = |V(G)| - 1$.
6) G não tem ciclos e para todo par $x, y \in V(G)$ com $xy \notin E(G)$, $G + xy$ tem exatamente um ciclo.

Consequências do teorema

- Se T é árvore e $xy \notin E(T)$ com $x, y \in V(T)$, então $T + xy$ tem exatamente um ciclo.
  Se $f \in E(T)$ pertence ao ciclo, então $T + xy - f$ é uma árvore.

- Se $T \subseteq G$ é árvore e $V(T) = V(G)$, então G é conexo.

- Se $T \subseteq G$ é árvore, $V(T) \neq V(G)$ e existe $xy \in E(G)$ com $x \in V(T)$ e $y \in V(G) \setminus V(T)$, então $T + xy$ é árvore.

Árvore Geradora

- $T \subseteq G$ é árvore geradora se T é árvore e $V(T) = V(G)$.

Busca em grafos

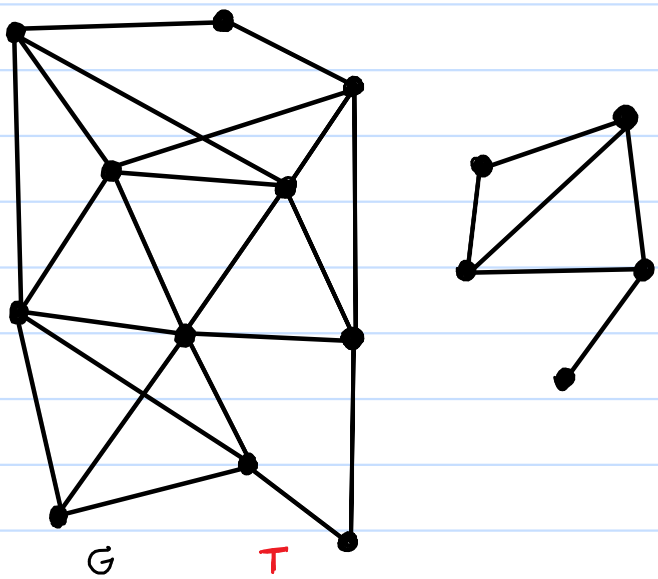
→ Nos dão informação sobre a estrutura de um grafo (caminhos)

→ Com poucos ajustes, resolvem outros problemas (conexão, ciclos, distância, bipartição, arestas de corte, geração de labirintos, componentes fortemente conexos, ...)

→ Inspiram a criação de outros algoritmos.

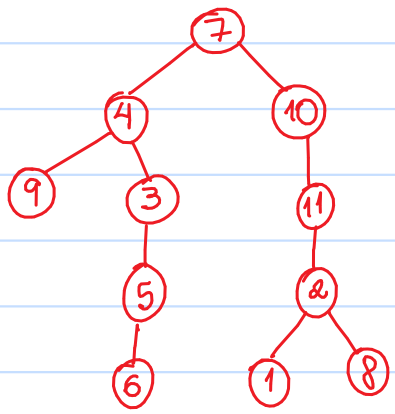
Ideia dos algoritmos de busca em grafos

Crescer uma árvore $T \subseteq G$. Se $V(T) = V(G)$, então G é conexo. Caso contrário, tentamos adicionar um vértice de $V(G) \setminus V(T)$ a T.



Árvore de busca

→ Todo vértice tem um predecessor na árvore (v.predecessor)



$$E(T) = \{ \{v.predecessor, v\} : v \in V(T) \setminus \{s\} \}$$

→ v.visitado = 1 se e somente se v estiver na árvore

Algoritmo genérico de busca (árvore implícita)

Busca(G, s)

$s.\texttt{visitado} = 1$
enquanto *houver aresta com um extremo visitado e outro não* **faça**
  Seja xy uma aresta com $x.\texttt{visitado} == 1$ e $y.\texttt{visitado} == 0$
  $y.\texttt{visitado} = 1$
  $y.\texttt{pred} = x$

Invariante: no início da t-ésima iteração, $v.\text{visitado} = 1$ sse existe sv-caminho.

ChamaBusca(G)

para *todo vértice* $v \in V(G)$ **faça**
  $v.\texttt{visitado} = 0$
  $v.\texttt{pred} = null$
seja $s \in V(G)$ qualquer
Busca(G, s)

Consequências do algoritmo de busca

Após a execução de Busca(G, s):

- $v.\text{visitado} = 1$ se e somente se há sv-caminho em G
- $v.\text{visitado} = 1$ se e somente se v e s estão na mesma componente conexa
- podemos construir um sv-caminho:

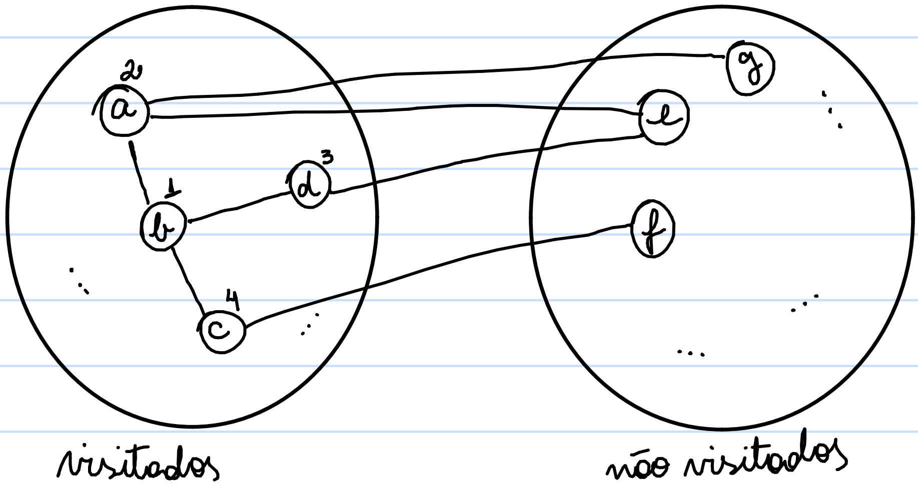
  $(s, \ldots, v.\text{predecessor}, v)$

  $(s, \ldots, v.\text{predecessor}.\text{predecessor}, v.\text{predecessor}, v)$

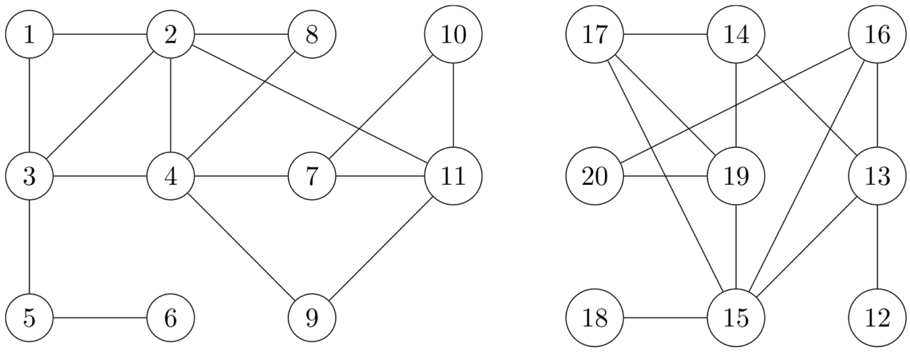
(outros sv-caminhos podem existir).

Busca em largura – BFS (Breadth-first search)

→ Explora a vizinhança dos vértices já visitados na ordem "primeiro a entrar, primeiro a sair".



Exemplo de execução da BFS ($s = 7$)



FILA : ( )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
visitado	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
predecessor																				
dist																				

Algoritmo – BFS

BuscaLarguraDistancia(G, s)

1 $s.$visitado $= 1$
2 $s.$dist $= 0$
3 cria fila vazia F
4 Enfileira(F, s)
5 **enquanto** $F.$tamanho > 0 **faça**
6     $u =$ Desenfileira(F)
7   **para** *todo vértice* $v \in N(u)$ **faça**
8   **se** $v.$visitado $== 0$ **então**
9             $v.$visitado $= 1$
10             $v.$dist $= u.$dist $+1$
11             $v.$pred $= u$
12   Enfileira(F, v)

n_s = nº vértices na comp. do s
m_s = nº arestas na comp. do s
$n = |V(G)|$ $m = |E(G)|$
$V_s(G)$ = conj. vértices na comp. do s

$n_s + 1$ } pois uma vez visitado, não
n_s } "desvisitamos" $\therefore$ cada v passa só uma vez pela linha 7

MATRIZ $= \Theta(n)$ p/ cada u
LISTA $= \Theta(d(u))$ p/ cada u } $\star$

$$\sum_{u \in V_s(G)} \star = \begin{cases} \to \Theta(n\, n_s) \\ \to \Theta(m_s) \end{cases}$$

TOTAL MATRIZ: $\Theta(n_s) + \Theta(n \cdot n_s) = \Theta(n \cdot n_s) = O(n^2)$ pois $n \geq n_s$.
TOTAL LISTAS: $\Theta(n_s) + \Theta(m_s) = \Theta(n_s + m_s) = O(n+m)$ pois $n \geq n_s$, $m \geq m_s$.

Por fim, note que a árvore T tal que

$$V(T) = \{v \in V(G) \colon v.\texttt{predecessor} \neq null\} \cup \{s\}$$
$$E(T) = \{\{v.\texttt{predecessor}, v\} \colon v \in V(T) \setminus \{s\}\}$$

é uma árvore geradora de G, contém um único sv-caminho para qualquer $v \in V(T)$ e é chamada de *árvore de busca em largura*.

LEMA: Sejam G um grafo e $s \in V(G)$. Na execução de BUSCALARGURADISTANCIA(G, s), se u e v são dois vértices que estão na fila e u entrou antes de v na fila, então $u.\text{dist} \leq v.\text{dist} \leq u.\text{dist} + 1$

TEOREMA: Sejam G um grafo e $s \in V(G)$. Ao fim de BUSCALARGURADISTANCIA(G, s), para todo $v \in V(G)$ vale que $v.\text{dist} = \text{dist}_G(s, v)$.

Busca em profundidade – DFS (Depth-first search)

→ Explora a vizinhança dos vértices já visitados na ordem "último a entrar, primeiro a sair".

BuscaProfRecursiva(G, s)

$s.$`visitado` $= 1$
para *todo vértice* $v \in N(s)$ **faça** → $\Theta(n)$ ou $\Theta(d(s))$
  se $v.$`visitado` $== 0$ **então**
    $v.$`pred` $= s$
    BuscaProfRecursiva(G, v) → uma para cada vértice visitado (n_s)

"Problemas" das buscas em digrafos

→ não obtemos sempre uma arborescência geradora, mesmo que uma exista.

→ Os vértices visitados não fazem parte de uma componente conexa do grafo subjacente e nem de uma componente fortemente conexa.

Boas notícias

→ A busca em largura ainda encontra distâncias

→ A busca em profundidade, com poucas alterações, encontra componentes fortemente conexas.