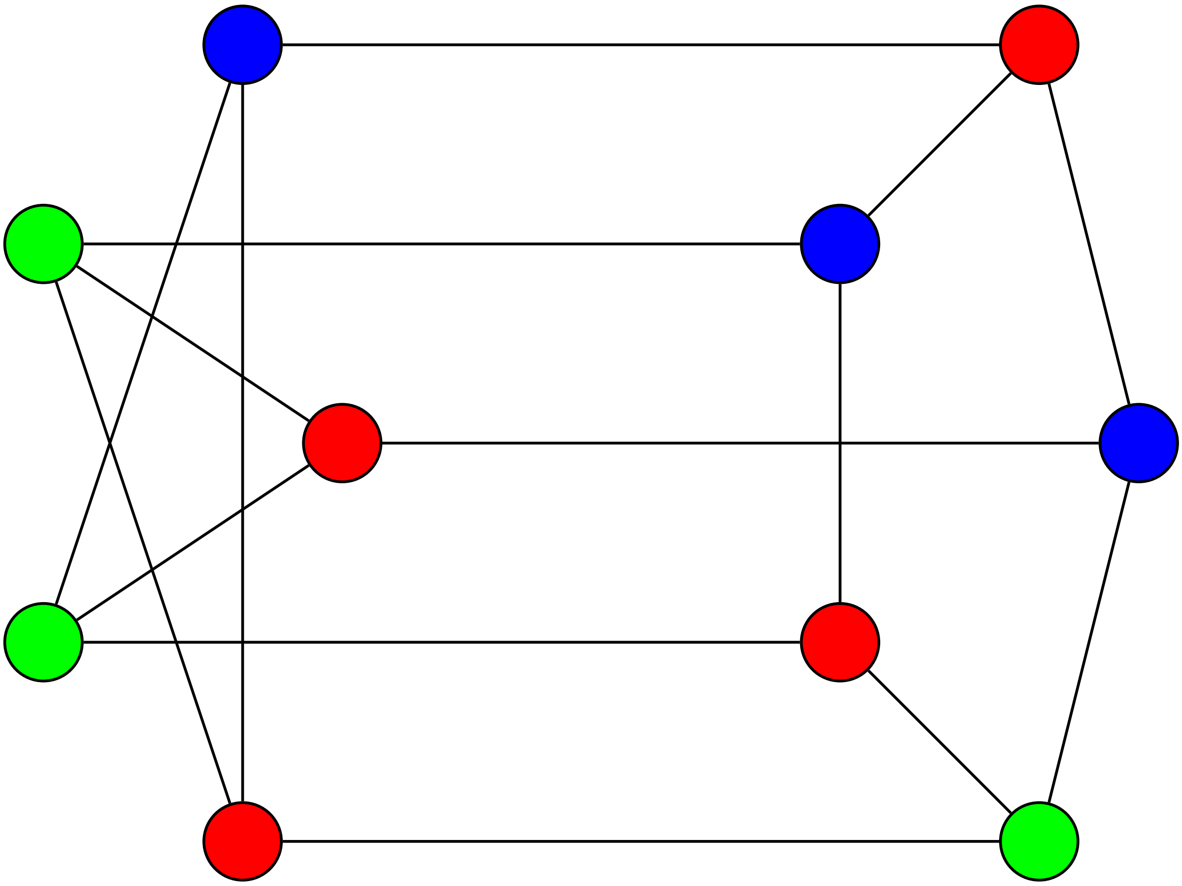
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos



Esse material é um compilado dos seguintes:

- Sedgewick, R.. *Algorithms in C, part 5: graph algorithms*. 3rd ed. Addison-Wesley. 2002.
- Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2008.
- Lintzmayer, C. N.; Mota, G. O.. *Notas de aulas - Análise de algoritmos e estruturas de dados*. Em construção.

13 Aula 18: grafos eulerianos e hamiltonianos

- Seja G um grafo conexo.
- Dizemos que:
  - uma trilha fechada T é uma *trilha Euleriana* se $E(T) = E(G)$;
  - G é um *grafo Euleriano* se contém uma trilha Euleriana;
  - uma trilha T é uma *trilha Euleriana aberta* se $E(T) = E(G)$.
- O Problema das Pontes de Königsberg é equivalente ao problema de detectar se o grafo que representa o mapa da cidade possui uma trilha Euleriana.
- Também relacionado a grafos Eulerianos está o *Problema do Carteiro Chinês*: dados um grafo G com $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$, encontrar o menor passeio que visita todas as arestas pelo menos uma vez.
  - Esse problema pode ser resolvido em tempo polinomial.
- Dizemos que:
  - um ciclo C é um *ciclo Hamiltoniano* se C é gerador ($V(C) = V(G)$);
  - G é um *grafo Hamiltoniano* se contém um ciclo Hamiltoniano;
  - um caminho C é um *caminho Hamiltoniano* se C é gerador.
- Relacionado a grafos Hamiltonianos está o *Problema do Caixeiro Viajante* (TSP, de *Traveling Salesman Problem*): dados um grafo G e $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo Hamiltoniano de custo mínimo em G.
  - Esse problema é NP-difícil.
- Na verdade, simplesmente decidir se um dado grafo G possui um ciclo Hamiltoniano ou um caminho Hamiltoniano já é NP-completo.
  - Por outro lado, existem algoritmos eficientes para decidir se um grafo G possui uma trilha Euleriana ou apenas decidir se G é Euleriano.
- Para grafos Eulerianos, são conhecidas *caracterizações*. Para grafos Hamiltonianos, ainda não são.
  - E caso existam, provavelmente não darão algoritmos eficientes.
- Note que, como os conceitos de ciclo e caminho estão bem definidos para digrafos, esses problemas estão naturalmente bem definidos em digrafos também.

13.1 Grafos Eulerianos

- Observe como "se comporta" uma trilha Euleriana (aberta) quando ela passa pelos vértices do grafo.
- Nesse contexto, dizemos que um grafo é *par* se todos os seus vértices têm grau par.
- O teorema a seguir dá uma caracterização para grafos Eulerianos. A ida é um resultado de Euler, de 1736, e a volta é um resultado de Hierholzer, de 1873.

Teorema 13.1. *Um grafo conexo G é Euleriano se e somente se G é par.*

Demonstração. Considere um grafo G conexo. Primeiro vamos mostrar que se G é euleriano, então G é par. Seja $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1})$ uma trilha Euleriana em G, em que $v_{k+1} = v_1$. Note que para $i = 1, 2, \ldots, k$, as arestas $v_{i-1}v_i$ e v_iv_{i+1} contribuem com duas unidades para o grau de v_i. Como toda aresta de G aparece em C, podemos concluir que todo vértice de G tem grau múltiplo de dois e, portanto, par.

Agora vamos mostrar que se G é par, então G é Euleriano. Vamos usar indução em $E = |E(G)|$. Se $E = 0$, então, por ser conexo, G é dado por $V(G) = \{v\}$ e $E(G) = \emptyset$. A trilha (v) é fechada e contém todas as arestas de G e, portanto, o resultado vale.

Agora, assuma que $E > 1$ e considere que todo grafo conexo par com menos do que E arestas é Euleriano. Como G é conexo e par, temos que $\delta(G) \geq 2$ e, como $E > 1$, temos que $|V(G)| \geq 2$. Assim, pelo Teorema 2.4, G contém um ciclo $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$. Seja $G' = G - E(C)$. Note que cada componente conexa de G' é par. Sejam $G'_1, G'_2, \ldots, G'_\ell$ as componentes conexas de G'. Note que para $i = 1, 2, \ldots, \ell$, temos que $|E(G'_i)| < E$. Assim, pela hipótese de indução, temos que, para $i = 1, 2, \ldots, \ell$, o grafo G'_i é Euleriano e, por definição, possui uma trilha Euleriana T_i. Agora, vamos mostrar como combinar tais trilhas das componentes de G' com o ciclo C para formar uma trilha Euleriana de G e, com isso, provar que G é Euleriano.

Como o grafo G é conexo, temos que $V(C) \cap V(G'_i) \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, \ell$, seja v_{r_i} o vértice mais à esquerda na sequência de C tal que $v_{r_i} \in V(C) \cap V(G'_i)$. Considere a sequência de vértices visitados pela trilha T_i como tendo início e, portanto, fim em v_{r_i}. Defina $C_1 = (v_1, \ldots, v_{r_1-1})$, $C_{\ell+1} = (v_{r_\ell+1}, \ldots, v_1)$ e, para $2 \leq i \leq \ell$, $C_i = (v_{r_{i-1}+1}, \ldots, v_{r_i-1})$. Note que $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_\ell + C_{\ell+1}$. Assim, a trilha $T = C_1 + T_1 + C_2 + T_2 + \cdots + C_\ell + T_\ell + C_{\ell+1}$ é uma trilha Euleriana em G. $\square$

Outra demonstração para “Se G é par, então G é Euleriano.”

Demonstração. Seja G conexo e par. Considere uma trilha máxima T em G. Primeiramente vamos provar que T é fechada. Suponha, por contradição, que T começa em um vértice u e termina em um vértice $v \neq u$. Então existe uma quantidade ímpar de arestas de T que incidem em v. Porém, $d(v)$ é par, então existe pelo menos uma aresta $vw \notin E(T)$. Mas então $T + vw$ é uma trilha maior do que T, um absurdo.

Resta mostrar que $T = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ é Euleriana. Suponha, por contradição, que T não é Euleriana. Então existe uma aresta $e \in E(G)$ que não está em T. Como G é conexo, existe um caminho de um dos extremos de e até algum v_i. Então existe $e' = v_i w$ que não está em T. Mas a trilha $(w, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ é maior do que T, um absurdo. □

- Uma *decomposição* de um grafo G é uma coleção $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ de subgrafos de G tal que:
  - para qualquer $1 \leq i < j \leq k$, temos que $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$; e
  - $\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i) = E(G)$.
- Note que, portanto, um vértice $v \in V(G)$ pode aparecer em mais de um G_i.
- Dizemos que uma decomposição $\mathcal{D}$ de um grafo G é uma *decomposição em ciclos* se todo elemento de $\mathcal{D}$ é um ciclo.

Teorema 13.2. *Um grafo é par se e somente se ele pode ser decomposto em ciclos.*

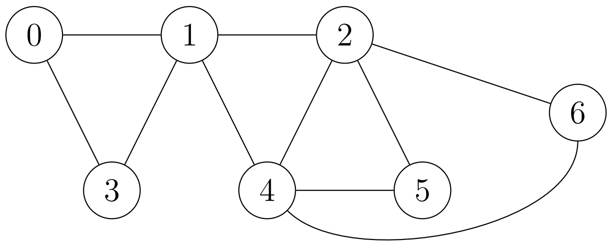
Corolário 13.3. *Um grafo par não possui arestas de corte.*

- O teorema a seguir caracteriza grafos que contêm uma trilha euleriana aberta.

Teorema 13.4. *Um grafo conexo G contém uma trilha euleriana aberta se e somente se G tem exatamente dois vértices de grau ímpar.*

- Um algoritmo bastante simples porém não tão eficiente que fornece uma trilha Euleriana é o algoritmo de Fleury (1883).
  - Cada aresta escolhida pelo algoritmo para fazer parte da trilha é removida; o algoritmo evita escolher arestas de corte (por quê?), a menos que não haja alternativa.

- Se quisermos uma trilha Euleriana aberta, então o vértice inicial v deve ser um dos vértices de grau ímpar.




```
Função FLEURY(G)
    seja v ∈ V(G) qualquer
    W ← (v)
    x ← v
    Enquanto d_G(x) ≠ 0 faça
        Escolha xy ∈ E(G) onde xy não é ponte, a menos que não haja alternativa
        Adicione y ao final de W
        x ← y
        G ← G − xy
    Devolve W
```

Teorema 13.5. *Se G é um grafo conexo par, então W devolvida pelo algoritmo de Fleury é uma trilha Euleriana.*

Demonstração. Seja W devolvida pelo algoritmo. Primeiro, note que W é trilha: por construção é um caminho e, além disso, a mesma aresta não aparece duas vezes em W, já que é removida do grafo. Também note que W é fechada: o vértice final de qualquer trilha fechada tem grau par na trilha e o algoritmo para quando atinge um vértice x com grau zero (x tinha grau par inicialmente).

Resta mostrar que W é Euleriana. Suponha, para fins de contradição, que não é. Denote por H o grafo G ao fim da execução. Como W não é Euleriana, $E(H) \neq \emptyset$. Além disso, como W é trilha fechada, H é par. Seja $X \subseteq V(G)$ o conjunto de vértices com grau positivo em H. Note que $V(G) \setminus X \neq \emptyset$ pois $v \in V(G) \setminus X$. Por construção, em H não existe aresta entre X e $V(G) \setminus X$ mas em G existe, pois G é conexo. Então W contém arestas com um extremo em X e outro em $V(G) \setminus X$. Considere uv como sendo a última aresta desse tipo, $u \in X$ e $v \in V(G) \setminus X$, que foi escolhida pelo algoritmo. Note que no momento em que ela foi escolhida, ela estava sozinha no corte $(X, V(G) \setminus X)$, o que significa que ela era ponte no grafo G. Nesse mesmo momento,

$x = u$, pois a trilha acaba em $V(G) \setminus X$. Mas H é par e, portanto, $d_H(u) \geq 2$, ou seja, havia outras arestas não ponte incidentes a u, pelo Corolário 13.3, violando a regra de escolha do algoritmo. □

- Como Fleury funciona, ele passa uma única vez por todas as arestas de G, porém em cada uma gasta um tempo para decidir se ela é ponte. Sendo assim, tem tempo total $O(E^2)$.
- Um algoritmo mais eficiente, de tempo $O(E)$, é o de Hierholzer (1873), dado a seguir. Sua ideia é decompor o grafo em trilhas fechadas menores e juntá-las em uma só, e ele segue justamente da prova do Teorema 13.1.
  - Cada vértice da trilha menor é salvo em uma pilha.
  - Então remover os vértices da pilha, a princípio, nos dá uma trilha.
  - Acontece que cada vértice removido da pilha pode ser o início de outra trilha.

```
Função TrilhaMaximal(G, v)
    Enquanto d(v) > 0 faça
        Push(P, x)
        seja x algum vizinho de v
        G ← G − vx
        v ← x
    Devolve v
```

```
Função Hierholzer(G)
    seja v ∈ V(G) qualquer
    seja P uma pilha
    W ← (v)
    Enquanto TrilhaMaximal(G, v) = v e P ≠ ∅ faça
        v ← Pop(P)
        Adicione v ao final de W
    Devolve W
```

13.2 Grafos Hamiltonianos

- Vamos nos concentrar no problema de "dado um grafo G, ele possui um ciclo/caminho Hamiltoniano?".

Lema 13.6. *Seja G um grafo conexo. Se G possui vértice de corte, então G não possui ciclo Hamiltoniano.*

Lema 13.7. *Seja G um grafo bipartido conexo e (X, Y) uma bipartição de G. Se $|X| < |Y|$, então G não possui ciclo Hamiltoniano.*

- O teorema a seguir é um resultado clássico que garante ciclo hamiltoniano para grafos nos quais todos os vértices têm grau alto.

Teorema 13.8 (Dirac, 1952)**.** *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$. Se $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G possui ciclo Hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha, para fins de contradição, que nem todo grafo com grau mínimo pelo menos $n/2$ possui ciclo Hamiltoniano. Seja G um tal grafo com n vértices e com o maior número de arestas (em outras palavras, G é um contraexemplo maximal). Claramente, G não é completo. Assim, existem vértices u e v não adjacentes em G.

Então pela escolha de G, $G + uv$ possui ciclo Hamiltoniano. Logo, G possui caminho Hamiltoniano. Seja $C = (v_1, \dots, v_n)$ um caminho Hamiltoniano em G, com $v_1 = u$ e $v_n = v$. Sejam $S = \{v_i \colon v_{i+1}u \in E(G)\}$ e $T = \{v_i \colon v_iv \in E(G)\}$. Note que $S \cap T = \emptyset$, pois se $v_i \in S \cap T$, então $(v_1, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1)$ seria um ciclo Hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G. Note também que $v_n \notin S \cup T$, de onde vemos que $|S \cup T| < n$. Então

$$n > |S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T| = |S| + |T| = d(u) + d(v) \ ,$$

mas

$$d(u) + d(v) \geq \delta(G) + \delta(G) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \ ,$$

uma contradição. □

- A prova do teorema de Dirac pode ser adaptada para provar os seguintes resultados.

Teorema 13.9 (Bondy-Chvátal, 1976). *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$ tal que existem vértices u e v não adjacentes para os quais $d(u) + d(v) \geq n$. O grafo G possui ciclo Hamiltoniano se e somente se $G + uv$ possui ciclo Hamiltoniano.*

Teorema 13.10 (Ore, 1960). *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$. Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $d(u) + d(v) \geq n$, então G possui ciclo Hamiltoniano.*