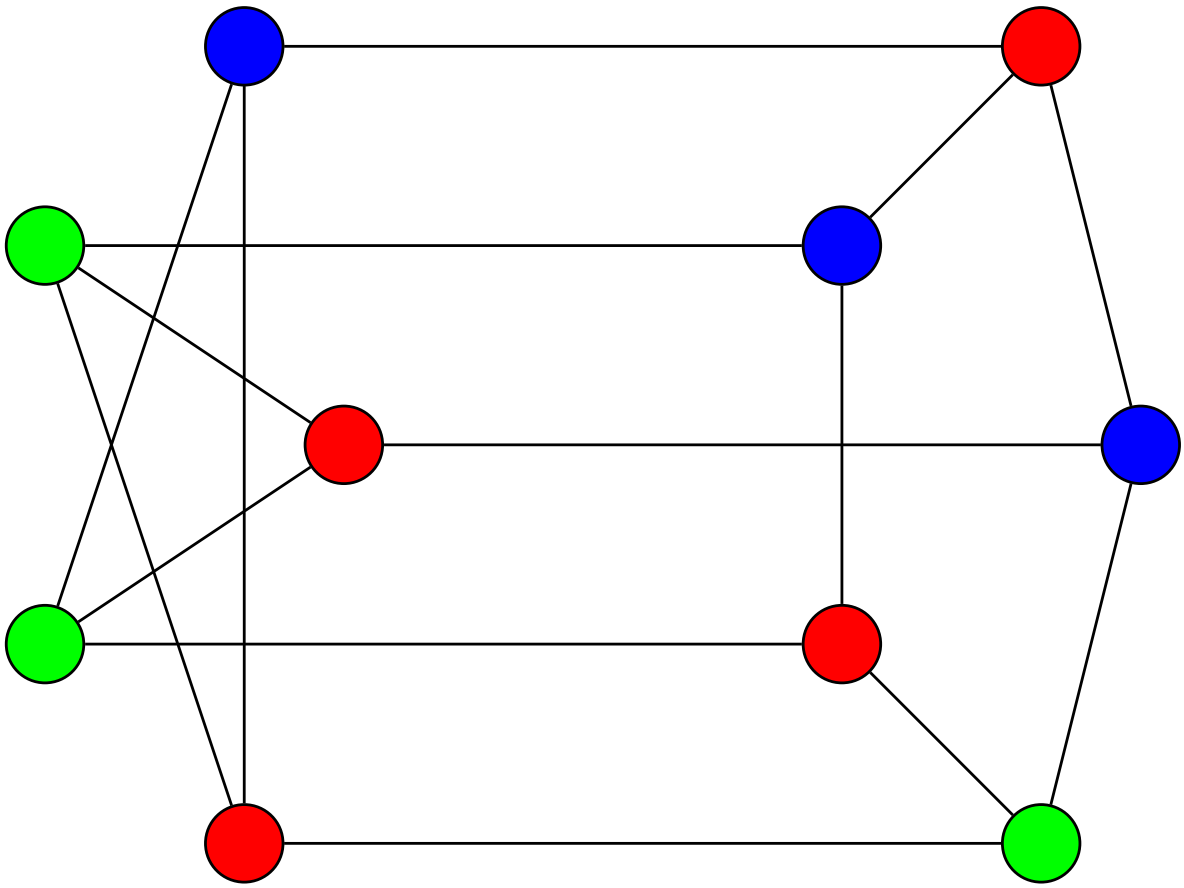
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos



Esse material é um compilado dos seguintes:

- Sedgewick, R.. *Algorithms in C, part 5: graph algorithms*. 3rd ed. Addison-Wesley. 2002.
- Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2008.
- Lintzmayer, C. N.; Mota, G. O.. *Notas de aulas - Análise de algoritmos e estruturas de dados*. Em construção.

14 Aula 19: emparelhamentos e conjuntos independentes

- Um *emparelhamento* em um grafo G é um conjunto $M \subseteq E(G)$ tal que quaisquer duas arestas de M não têm extremos em comum.
  - As arestas de M são duas a duas *não-adjacentes*.
- Uma aresta sozinha já forma um emparelhamento, então os problemas mais interessantes aqui envolvem encontrar um emparelhamento de maior tamanho possível.
  - Ou de maior custo possível, caso as arestas do grafo tenham custos associados.
- Um *conjunto independente* em um grafo G é um conjunto $I \subseteq V(G)$ tal que os vértices em I são dois a dois não-adjacentes.
  - Ou seja, $E(G[I]) = \emptyset$.
- Note que uma aresta sozinha já forma um emparelhamento, assim como um vértice sozinho já forma um conjunto independente. Então os problemas mais interessantes aqui são de *maximização*:
  - Qual o maior conjunto independente de um dado grafo?
  - Qual o maior emparelhamento de um dado grafo?
- Caso o grafo tenha custos associados às arestas, então o custo de um emparelhamento deixa de ser sua *cardinalidade* e passa a ser a soma dos custos das arestas contidas nele.
- De forma equivalente, caso o grafo tenha custos associados aos vértices, então o custo de um conjunto independente também deixa de ser sua *cardinalidade* e passa a ser a soma dos custos dos vértices contidos nele.
- Encontrar o maior emparelhamento (ou o mais custoso) em um grafo é um problema fácil, no sentido de que existem algoritmos de tempo polinomial que o resolvem.
- Encontrar o maior conjunto independente (ou o mais custoso), por sua vez, é um problema NP-difícil.

14.1 Emparelhamentos

- Seja M um emparelhamento em um grafo G:
  - para $uv \in M$, dizemos que u e v estão *emparelhados* por M e escrevemos $M(u) = v$ e $M(v) = u$;
  - para $X \subseteq V(G)$, dizemos M *cobre X* se cada vértice de X é extremo de alguma aresta em M;
  - M é *perfeito* se cobre $V(G)$;
  - M é maximal de não está contido em outro emparelhamento;
  - M é máximo se G não possui outro emparelhamento maior do que M;
  - se $v \in V(G)$ não é coberto por M, então v é dito *livre* (em M).
- Note que nem todo grafo possui um emparelhamento perfeito.
  - Qual o número de arestas que um emparelhamento perfeito tem?
  - Qual o maior número de arestas que um emparelhamento pode ter?
- Motivação: casamento estável, residentes e hospitais, doação de rins, ...
- Problemas de interesse:
  - Verificar se um dado emparelhamento é máximo.
  - Decidir se um grafo possui um emparelhamento perfeito.
  - Encontrar um emparelhamento de tamanho máximo em um grafo.
    - algoritmo de Egerváry (Húngaro) se G é bipartido: $O(VE)$
    - algoritmo de Hopcroft-Karp, se G é bipartido: $O(E \log V)$
    - algoritmo de Edmonds: $O(V^2E)$
    - algoritmo de Blum: $O(E \log V)$ (melhor conhecido)
- Seja M um emparelhamento em um grafo G:
  - um *caminho M-alternante* em G é um caminho cujas arestas alternam entre arestas de M e de $E(G) \setminus M$;
  - um *ciclo M-alternante* em G é um ciclo cujas arestas alternam entre arestas de M e de $E(G) \setminus M$;
- O teorema a seguir apresenta uma caracterização de emparelhamento máximo em qualquer grafo.

Teorema 14.1 (Berge, 1957). *Seja G um grafo e M um emparelhamento em G. O emparelhamento M é máximo se e somente se G não possui um caminho M-alternante cujos extremos são livres.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se M é máximo, então G não possui um caminho M-alternante cujos extremos são livres. Seja M um emparelhamento máximo em G. Suponha, para fins de contradição, que exista um tal caminho P em G. Seja $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$. Note que nenhuma aresta de $M \setminus E(P)$ é incidente a vértices de P, pois os extremos de P são livres. Logo, M' é um emparelhamento. Como ambos extremos de P são livres, $|E(P) \setminus M| = |E(P) \cap M| + 1$. Então

$$\begin{aligned} |M'| &= |M \setminus E(P)| + |E(P) \setminus M| \\ &= |M \setminus E(P)| + |E(P) \cap M| + 1 \\ &= |M| + 1 \ , \end{aligned}$$

uma contradição.

Agora vamos provar que se G não possui um caminho M-alternante com extremos livres, então M é máximo. Suponha que nenhum caminho M-alternante em G tem os extremos livres e suponha, para fins de contradição, que M não é máximo. Seja então M' máximo (logo, $|M'| > |M|$). Seja $H = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$. Note que as componentes de H são caminhos ou ciclos cujas arestas alternam entre M e M'. Então $\Delta(H) \leq 2$. Além disso, cada ciclo de H tem um número par de arestas. Assim, como $|M'| > |M|$, ao menos uma componente de H é um caminho P que tem mais arestas de M' do que de M. As arestas nos extremos de P, portanto, são de M'. Mas então P é um caminho M-alternante com os extremos livres em M, uma contradição. □

- Lembre-se que dado um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, o conjunto $\partial_G(S)$ é o conjunto de arestas $\{uv \in E(G) \colon u \in S \text{ e } v \notin S\}$, isto é, o conjunto de arestas que cruzam o corte $(S, V(G) \setminus S)$.

- O teorema a seguir nos dá uma caracterização de grafos bipartidos que possuem um emparelhamento que cobre uma parte.
  - Seu resultado implica que basta mostrar um subconjunto de X com poucos vizinhos para provar que G não possui um emparelhamento que cobre X, onde X é uma das partes da bipartição.

Teorema 14.2 (Hall, 1935). *Seja G um grafo conexo (X, Y)-bipartido, com $|X| \leq |Y|$. O grafo G possui um emparelhamento que cobre X se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que se G possui um emparelhamento que cobre X, então $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$. Seja M um emparelhamento de G que cobre X. Tome um $S \subseteq X$ qualquer. Para todo $u \in S$, o vértice $M(u)$ está em $N(S)$. Assim, $|N(S)| \geq |S|$.

Agora vamos provar que se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$, então G possui um emparelhamento que cobre X. Suponha, para fins de contradição, que G não possui um emparelhamento que cobre X. Seja M um emparelhamento máximo em G e seja $a \in X$ um vértice livre em M. Seja $Z = \{v \in V(G) \colon \text{ existe } av\text{-caminho } M\text{-alternante em } G\}$. Sejam $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Note que $a \in S$.

Considere um percurso em um caminho M-alternante que começa em a. Note que chegamos em T por arestas de $E(G) \setminus M$ e saímos de T por arestas de M. Exceto por a, chegamos em $S - a$ por arestas de M. Então, os vértices de T estão emparelhados aos vértices de $S - a$ por M. Ou seja, todo vértice de T é coberto por M e, portanto, $|T| = |S| - 1$ e $T = N(S)$. Assim, $|T| = |N(S)| = |S| - 1 < |S|$, contrariando a hipótese. $\square$

14.2 Conjuntos independentes

- Seja I um conjunto independente em um grafo G:
  - I é maximal se não está contido em nenhum outro conjunto independente;
  - I é máximo se G não possui outro conjunto independente maior do que I;
- Denotamos por $\alpha(G)$ a cardinalidade de um conjunto independente máximo em G, também chamado *número de estabilidade de G*.
  - Em inglês, um conjunto independente pode ser chamado de *independent set* ou de *stable set*.
- Uma *clique* em um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que os vértices em S são dois a dois adjacentes.
  - Ou seja, $G[S]$ é um grafo completo.
- Novamente, um único vértice já é uma clique, então sempre é interessante encontrar cliques máximas.
  - Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade de uma clique máxima em G.
- O resultado a seguir implica que $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Teorema 14.3. *Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Então S é uma clique em G se e somente se S é um conjunto independente em $\overline{G}$.*

- Para mostrar resultados do tipo $\alpha(G) \geq k$, basta apresentar um conjunto independente que tenha tamanho k, ou então mostrar k vértices que com certeza tenham que fazer parte de qualquer conjunto independente em G.
- E para mostrar resultados do tipo $\alpha(G) \leq k$?
  - Por exemplo, $\alpha(G) \leq |V(G)|$.
  - Ou então, $\alpha(G) \leq |V(G)| - (\omega(G) - 1)$.

Lema 14.4. *Para todo grafo G, $\alpha(G) \leq \dfrac{|E(G)|}{\delta(G)}$.*

Demonstração. Seja X um conjunto independente máximo de G. Note que a quantidade de arestas que têm algum extremo em X é

$$\sum_{v\in X} d(v) \geq \sum_{v\in X} \delta(G) = |X|\delta(G) = \alpha(G)\delta(G) \ .$$

Por outro lado, a quantidade de arestas no grafo é $|E(G)| \geq \sum_{v\in X} d(v)$. Assim, $|E(G)| \geq \alpha(G)\delta(G)$, de onde o resultado segue. □

- O resultado do lema anterior não pode ser melhorado, pois $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor |E(C_n)|/\delta(C_n) \rfloor$.
- Por outro lado, $\alpha(K_n) = 1$ e $|E(K_n)|/\delta(K_n) = n/2$.

Lema 14.5. *Para todo grafo G, $\alpha(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$.*

Demonstração. Seja X um conjunto independente maximal em G. Note que todo vértice de $V(G) \setminus X$ tem pelo menos um vizinho em X, caso contrário X não seria maximal. Então

$$|V(G) \setminus X| \leq \sum_{v\in X} d(v) \ .$$

Por outro lado, todo vértice de X tem no máximo $\Delta(G)$ vizinhos. Então

$$\sum_{v\in X} d(v) \leq |X|\Delta(G) \ .$$

Juntando as duas inequações, temos

$$\begin{aligned} |V(G) \setminus X| &\leq |X|\Delta(G) \\ |V(G) \setminus X| + |X| &\leq |X|\Delta(G) + |X| \\ |V(G)| &\leq |X|(\Delta(G)+1) \ . \end{aligned}$$

E o resultado segue pois $|X| \leq \alpha(G)$. □

- O resultado do lema anterior não pode ser melhorado pois $\alpha(K_n) = 1 = \dfrac{n}{\Delta(K_n)+1}$.
- Por outro lado, $\alpha(K_{n,n}) = n$ mas $\dfrac{2n}{\Delta(K_{n,n})+1} = \dfrac{2n}{n+1} \approx 2$.

15 Aula 19: coloração de vértices e de arestas

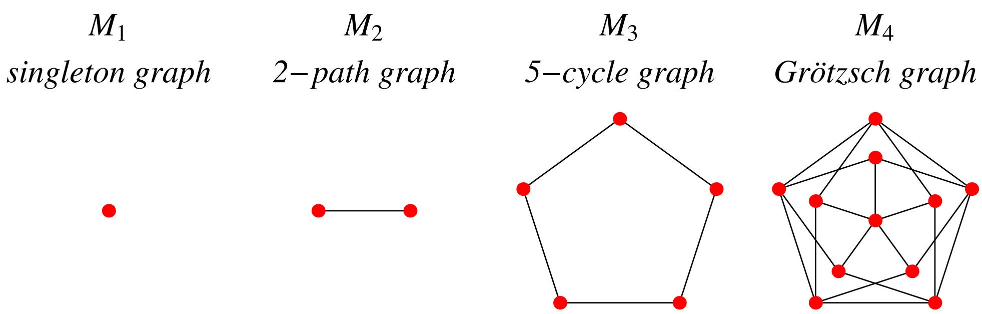
- Seja G um grafo.
- Uma *k-coloração (própria)* de G é uma função $c\colon V(G) \to \{1, \dots, k\}$ tal que $c(x) \neq c(y)$ para toda $xy \in E(G)$.
  - Cada inteiro $i \in \{1, \dots, k\}$ é chamado de *cor*.
- Definição equivalente: é uma *partição* $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $V(G)$ em conjuntos independentes, isto é, $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e $V(G) = \cup_{i=1}^{k} C_i$.
  - Cada conjunto independente C_i é chamado de *classe de cor*.
- Uma *k-aresta-coloração (própria)* de G é uma função $c\colon E(G) \to \{1, \dots, k\}$ tal que $c(xy) \neq c(xz)$ para todo $xy, xz \in E(G)$ e $y \neq z$.
- Definição equivalente: é uma *partição* $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$ de $E(G)$ em emparelhamentos.
- Claramente, todo grafo de ordem n possui uma n-coloração, assim como todo grafo com m arestas possui uma m-aresta-coloração, então o interessante nesses problemas é *minimizar* o número de cores usadas.
- Os dois problemas são “igualmente” difíceis.

15.1 Coloração de vértices

- O *número cromático* de G, denotado $\chi(G)$, é o menor valor k tal que G possui uma k-coloração dos vértices.
  - $\chi(G) \leq |V(G)|$;
  - $\chi(G) = 2$ se e somente se G é um grafo bipartido não vazio;
  - $\chi(C_{2k}) = 2$;
  - $\chi(C_{2k+1}) = 3$;
  - $\chi(K_n) = n$;
  - $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- Problemas:
  - Decidir se um grafo qualquer possui uma 3-coloração é NP-completo.
  - Encontrar $\chi(G)$ para qualquer G é NP-difícil.

Lema 15.1. *Para todo grafo G, $\chi(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.*

- Apesar que $\chi(G) \geq \omega(G)$ para qualquer grafo, esses valores podem ser muito diferentes entre si.
  - Grafos de Mycielski têm $\omega(M_k) = 2$ e $\chi(M_k) = k$.



- Apesar de não conseguirmos mostrar que $\chi(G)$ é maior ou igual a $\Delta(G)$, o grau máximo do grafo tem sim relação com o número cromático, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 15.2. *Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Nossa demonstração segue por indução em $n = |V(G)|$. Se G contém apenas um vértice, i.e., $n = 1$, então $\Delta(G) = 0$ e $\chi(G) = 1$, e o resultado segue.

Então seja G um grafo com $n > 1$ vértices e suponha que para qualquer grafo H com n' vértices, sendo $1 \leq n' < n$, vale que $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$.

Seja $u \in V(G)$ um vértice qualquer. Seja $G' = G - u$ e note que $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Como $|V(G')| < n = |V(G)|$, então, pela hipótese de indução, vale que $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1$. Assim,

$$\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1\,.$$

Seja $\mathcal{C}'$ uma coloração mínima de G', isto é, uma partição de $V(G')$ em $\chi(G')$ conjuntos independentes. Vamos mostrar como obter um coloração própria para G a partir de $\mathcal{C}'$. Para isso, vamos dividir a prova em dois casos: (i) $\chi(G') < \Delta(G) + 1$; e (ii) $\chi(G') = \Delta(G) + 1$.

Primeiro, suponha que $\chi(G') < \Delta(G)+1$. Nesse caso, $\chi(G') \leq \Delta(G)$ e o conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \{\{u\}\}$ é uma coloração própria de G que usa $\chi(G') + 1$ cores. Assim,

$$\chi(G) \leq |\mathcal{C}| = \chi(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1\,,$$

e o resultado segue.

Agora, suponha que $\chi(G') = \Delta(G) + 1$. Como $d_G(u) \leq \Delta(G)$, então segue que $d_G(u) \leq \chi(G') - 1$, isto é, u possui no máximo $\chi(G') - 1$ vizinhos. Como $|\mathcal{C}'| = \chi(G')$, podemos assumir que existe uma classe de cor $C \in \mathcal{C}'$ tal que $N_G(u) \cap C = \emptyset$. Nesse caso, $\mathcal{C} = \big(\mathcal{C}' \setminus \{C\}\big) \cup \big\{C \cup \{u\}\big\}$ é uma coloração própria de G que usa $\chi(G')$ cores. Então $\chi(G) \leq |\mathcal{C}| = \chi(G') = \Delta(G) + 1$ e o resultado segue. $\square$

- A prova do teorema anterior fornece diretamente um algoritmo recursivo que colore grafos e garante que não serão utilizadas mais do que $\Delta(G) + 1$ cores.
- O algoritmo a seguir é uma versão iterativa dele, e é a mais comumente apresentada.

Função COLORE(G)

  Seja C um vetor de tamanho n

  Para $v \in V(G)$ **faça**

    Seja c o menor valor de cor que ainda não foi atribuída aos vizinhos já coloridos de v

    $C[v] \leftarrow c$

  Devolve C

Outra prova para o Teorema 15.2.

Demonstração. No algoritmo COLORE(G), no momento de atribuir uma cor a um vértice v, a cor usada será no máximo $d(v) + 1$, uma vez que todos os vizinhos de v já podem estar coloridos com $d(v)$ cores diferentes. Então o maior valor de cor usada será no máximo $\Delta(G) + 1$. □

- É possível, por meio de exemplos, provar que o algoritmo acima não é ótimo (isto é, nem sempre devolve uma coloração que usa o número cromático de cores).
- É possível também provar que sempre existe alguma ordem nos vértices que faz o algoritmo devolver uma coloração ótima.
  - O resultado mostrar que ela *existe*, e não como construí-la.
- Será que é possível melhorar o limitante $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$?

Teorema 15.3 (Brooks, 1941). *Seja G um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo. Então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

16 Coloração de arestas

- O *índice cromático* de G, denotado $\chi'(G)$, é o menor valor k tal que G possui uma k-aresta-coloração.
  - $\chi'(G) \leq |E(G)|$;
  - $\chi'(C_{2k}) = 2 = \Delta(G)$;
  - $\chi'(C_{2k+1}) = 3 > \Delta(G)$;
  - $\chi(K_{2k}) = k$;
  - $\chi(K_{2k+1}) = k + 1$;
  - $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
- Problemas:
  - Encontrar $\chi'(G)$ é NP-difícil.

Lema 16.1. *Para todo grafo G, $\chi'(G) \geq \left\lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor |V(G)|/2 \rfloor} \right\rceil$.*

Lema 16.2. *Se G é um grafo bipartido k-regular, então G pode ser decomposto em k emparelhamentos perfeitos.*

- A prova dos dois teoremas a seguir são construtivas, e se baseiam nas seguintes ideias:
  - Seja G um grafo que queremos aresta-colorir.
  - Seja $e \in E(G)$ e $H = G - e$ tal que conseguimos aresta-colorir H.
  - Seja c uma aresta-coloração de H.
  - Dizemos que a cor i está sendo *usada em/por* $v \in V(G)$ se $c(vx) = i$ para alguma aresta $vx \in E(H)$.
  - Caso contrário, a cor i está *livre/disponível* em v.
  - Uma cor está *livre/disponível em uma aresta* $uv \in E(G) \setminus E(H)$, se a cor está livre/disponível em ambos os extremos da aresta.
  - Note que qualquer cor disponível em e pode ser atribuída a e para estender c para uma k-aresta-coloração de G.

- Quando não há uma cor disponível em e, mostramos que é sempre possível trocar as cores de algumas arestas, de forma controlada, a fim de deixar uma cor disponível em e e, assim, seguir com o passo anterior.

- O último passo depende da seguinte observação:
  - Sejam i e j duas cores e sejam $M_i = \{e \in E(H) \colon c(e) = i\}$ e $M_j = \{e \in E(H) \colon c(e) = j\}$. O grafo $H_{ij} = H[M_i \cup M_j]$ tem como componentes ciclos pares ou caminhos, que chamaremos de *ij-alternantes*.

Teorema 16.3 (Kőnig, 1916)**.** *Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Demonstração. Por indução no número m de arestas. Quando $m = 1$, claramente $\chi'(G) = 1$, o que é igual a $\Delta(G)$. Considere então um grafo bipartido G com $m > 1$ arestas e suponha que para qualquer grafo bipartido G' com menos de m arestas vale que $\chi'(G') = \Delta(G')$.

Seja então $uv \in E(G)$ uma aresta de G e seja $H = G - uv$. Como H é bipartido, então por hipótese, $\chi'(H) = \Delta(H)$. Note ainda que $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Vamos tentar aresta-colorir G estendendo uma aresta-coloração de H.

Se $\Delta(H) < \Delta(G)$, então $\Delta(H) = \Delta(G) - 1$ e podemos colorir uv com uma cor totalmente nova, gerando uma coloração para G com $\Delta(G)$ cores.

Agora suponha que $\Delta(H) = \Delta(G)$. Considere uma aresta-coloração $c \colon E(H) \to \Delta(H)$ ótima de H. Note que, independente do grau de u e v em G, vale que $d_H(u) < \Delta(G)$ e $d_H(v) < \Delta(G)$. Assim, pelo menos uma cor i não está sendo usada pelos vizinhos de u e pelo menos uma cor j não está sendo usada pelos vizinhos de v. Se $i = j$, então atribua a cor i à aresta uv. Isso nos dá uma aresta-coloração de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$ cores.

Então podemos assumir que $i \neq j$ e considere o subgrafo $H_{ij} = H[M_i \cup M_j]$. Como a cor j está sendo usada nos vizinhos de u e a cor i está sendo usada nos vizinhos de v, então certamente u e v têm grau um em H_{ij}. Assim, a componente de H_{ij} que contém u é um caminho P cujas cores i e j se alternam.

Se P termina em u, então significa que há, em H e em G, um vu-caminho de comprimento par, de forma que $P + uv$ seria um ciclo ímpar em G, uma contradição com G ser bipartido. Então P não termina em u. Ao trocar as cores das arestas em P, obtemos uma coloração própria de H na qual a cor i está disponível em ambos u e v.

Assim, podemos atribuir a cor i à aresta uv, obtendo uma coloração para G com $\Delta(G)$ cores. $\square$

- O resultado a seguir mostra que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Com isso, temos que, para *qualquer* grafo G, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Surpreendentemente, decidir se $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou se $\chi'(G) = \Delta(G)+1$ para qualquer G é um problema NP-completo.

Teorema 16.4 (Vizing, 1964). *Para todo grafo G, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em $m = |E(G)|$ que G tem uma $(\Delta(G) + 1)$-aresta-coloração.

Se $m = 1$, então $\Delta(G) = 1$ e claramente podemos aresta-colorir o grafo com $\Delta(G) + 1$ cores.

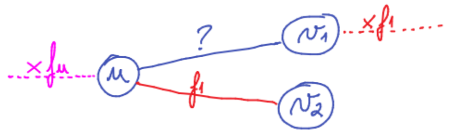
Suponha que qualquer grafo H com m' arestas, com $1 \leq m' < m$, possui uma $(\Delta(H) + 1)$-aresta-coloração.

Seja G um grafo com $m > 1$ arestas. Seja $e \in E(G)$ qualquer. Por hipótese de indução, $G - e$ tem uma $(\Delta(G - e) + 1)$-aresta-coloração. Como $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$, então $G - e$ tem uma $(\Delta(G) + 1)$-aresta-coloração c. Vamos mostrar que é possível atribuir uma das cores de $\{1, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ a e, recolorindo algumas arestas se necessário.

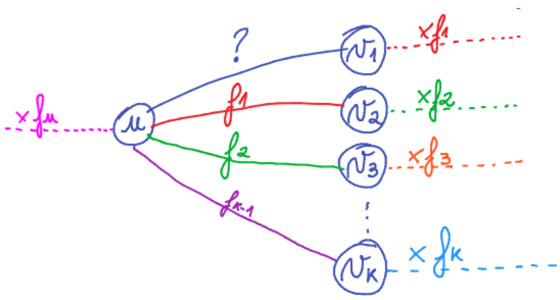
Como qualquer vértice de $G - e$ tem grau no máximo $\Delta(G)$, então todo vértice tem pelo menos uma cor disponível. Em particular, os extremos da aresta e possuem alguma cor disponível. Se a cor disponível em ambos for a mesma, então basta atribuí-la a e para aresta-colorir G como desejado.

Então seja $e = uv_1$ com f_u sendo a cor disponível em u e f_1 sendo a cor disponível em v_1, onde assumimos $f_1 \neq f_u$.

Como f_1 não está disponível para u, ela está sendo usada por outro vizinho de u, digamos v_2.

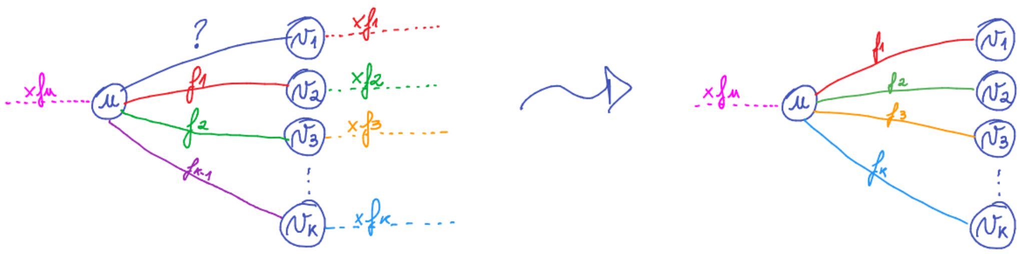


Como todo vértice de $G - e$ tem uma cor disponível, existe uma cor disponível para v_2. Vamos chamá-la de f_2. Vamos repetir esse processo de modo a encontrar uma sequência de vértices $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ e de cores $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ tal que f_i não é usada por v_i, para todo $1 \leq i \leq k$, e a aresta uv_{i+1} tem cor f_i.

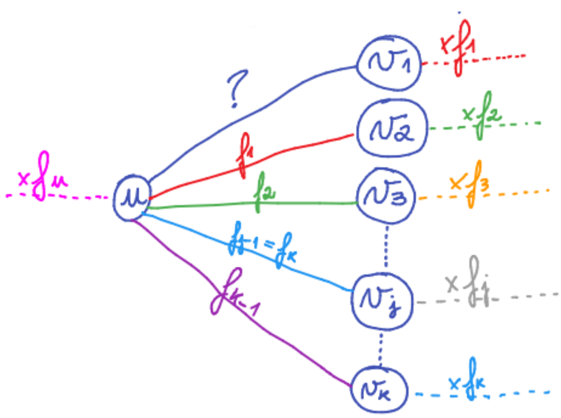


Note que como as cores $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ são usadas por u, temos que $f_u \notin \{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$.

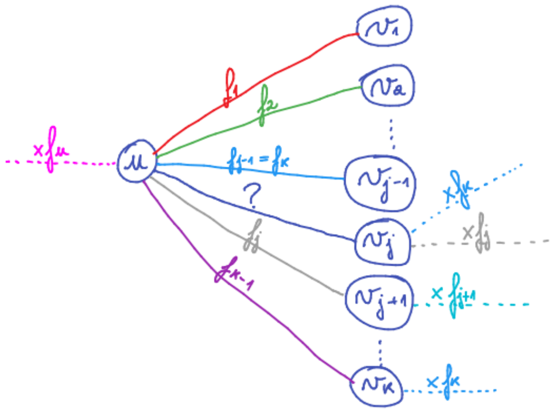
Vamos primeiro mostrar que o processo acima para. De fato, existem dois motivos para ele parar. Primeiro, pode ser porque a cor f_k não é usada por nenhum vizinho de u. Nesse caso, podemos recolorir as arestas uv_i, para $2 \leq i \leq k$, atribuindo a uv_i a cor f_i e então atribuindo a uv_1 a cor f_1. Note que isso resulta em uma $(\Delta(G) + 1)$-aresta-coloração de G.



O segundo motivo de parada do processo é porque a cor f_k já está sendo usada em u. Seja v_j o vizinho de u tal que $f_{j-1} = f_k$. Note que $v_j \neq v_k$, pois caso contrário estaríamos no caso anterior.



Vamos recolorir as arestas uv_i, para $2 \leq i < j$, atribuindo a cor f_i a uv_i, atribuindo a cor f_1 a uv_1 e deixando uv_j sem cor.



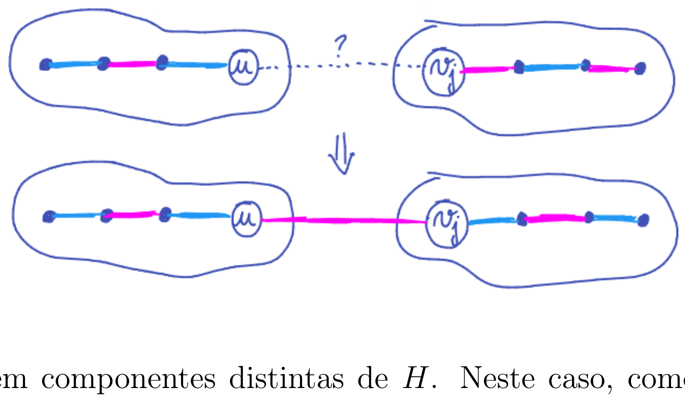
Note que agora a cor f_k está disponível para v_j. Agora o grafo $G - uv_j$ está todo aresta-colorido com no máximo $(\Delta(G) + 1)$ cores. Seja H o subgrafo de $G - uv_j$ induzido pelas cores f_u e f_k. Note que H contém apenas ciclos e caminhos. Note ainda que:

1. $d_H(u) = 1$, pois a aresta uv_{j-1} tem cor f_k e a cor f_u é livre em u;

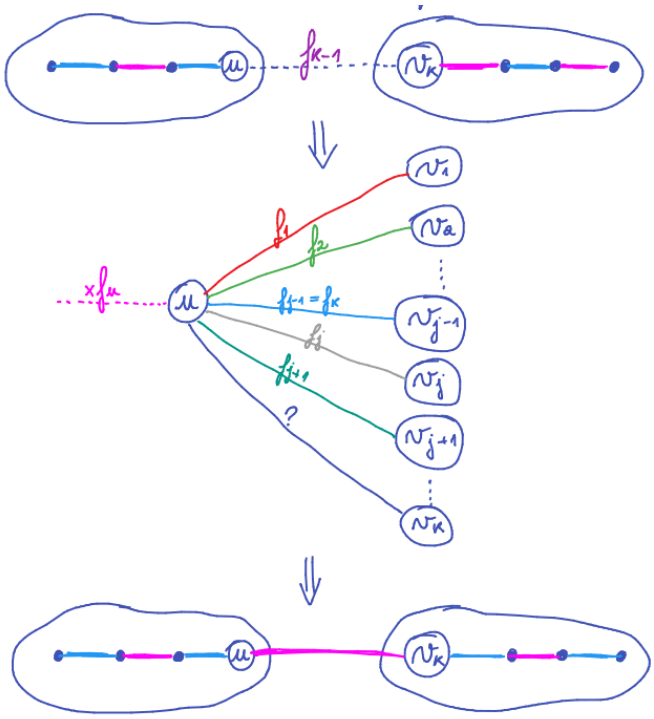
2. $d_H(v_j) \leq 1$ e $d_H(v_k) \leq 1$, pois a cor f_k é livre em v_j e em v_k.

Então u, v_j e v_k não podem estar na mesma componente em H. Temos então dois casos:

- u e v_j estão em componentes distintas de H. Neste caso, trocamos as cores f_k e f_u na componente que contém v_j e então colorimos uv_j com f_u.



- u e v_k estão em componentes distintas de H. Neste caso, como uv_k está colorida, recolorimos as arestas uv_i para $j \leq i < k$, atribuindo a cor f_i a uv_i e deixando uv_k sem cor. Note que essa recoloração não envolve as cores f_u e f_k e, portanto, H continua o mesmo. Então trocamos as cores f_k e f_u na componente que contém v_k e atribuímos a cor f_u a uv_k.



□