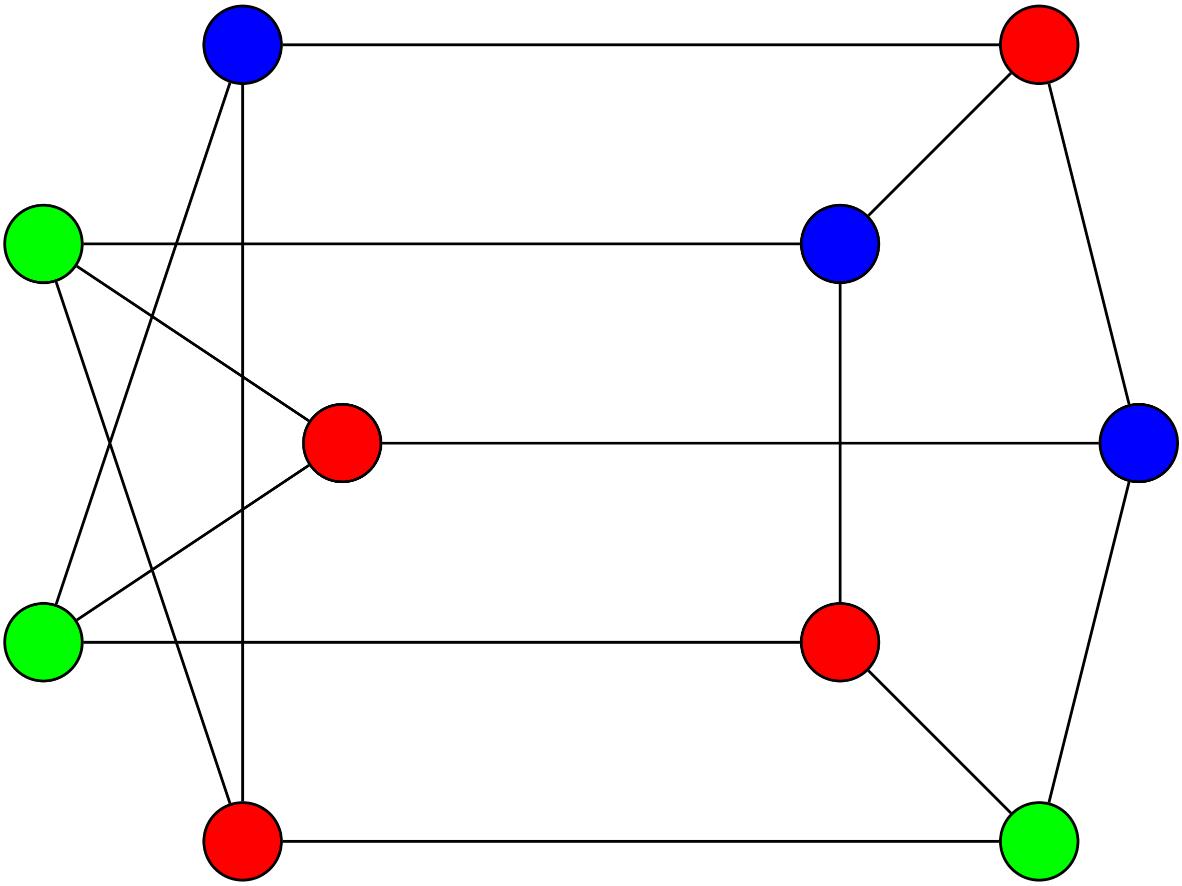
Centro de Matemática, Computação e Cognição

Universidade Federal do ABC

Profa. Carla Negri Lintzmayer

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos



Esse material é um compilado dos seguintes:

- Sedgewick, R.. *Algorithms in C, part 5: graph algorithms*. 3rd ed. Addison-Wesley. 2002.
- Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2008.
- Lintzmayer, C. N.; Mota, G. O.. *Notas de aulas - Análise de algoritmos e estruturas de dados*. Em construção.

14 Aula 19: emparelhamentos e conjuntos independentes

- Um *emparelhamento* em um grafo G é um conjunto $M \subseteq E(G)$ tal que quaisquer duas arestas de M não têm extremos em comum.
  - As arestas de M são duas a duas *não-adjacentes*.
- Uma aresta sozinha já forma um emparelhamento, então os problemas mais interessantes aqui envolvem encontrar um emparelhamento de maior tamanho possível.
  - Ou de maior custo possível, caso as arestas do grafo tenham custos associados.
- Um *conjunto independente* em um grafo G é um conjunto $I \subseteq V(G)$ tal que os vértices em I são dois a dois não-adjacentes.
  - Ou seja, $E(G[I]) = \emptyset$.
- Note que uma aresta sozinha já forma um emparelhamento, assim como um vértice sozinho já forma um conjunto independente. Então os problemas mais interessantes aqui são de *maximização*:
  - Qual o maior conjunto independente de um dado grafo?
  - Qual o maior emparelhamento de um dado grafo?
- Caso o grafo tenha custos associados às arestas, então o custo de um emparelhamento deixa de ser sua *cardinalidade* e passa a ser a soma dos custos das arestas contidas nele.
- De forma equivalente, caso o grafo tenha custos associados aos vértices, então o custo de um conjunto independente também deixa de ser sua *cardinalidade* e passa a ser a soma dos custos dos vértices contidos nele.
- Encontrar o maior emparelhamento (ou o mais custoso) em um grafo é um problema fácil, no sentido de que existem algoritmos de tempo polinomial que o resolvem.
- Encontrar o maior conjunto independente (ou o mais custoso), por sua vez, é um problema NP-difícil.

14.1 Emparelhamentos

- Seja M um emparelhamento em um grafo G:
  - para $uv \in M$, dizemos que u e v estão *emparelhados* por M e escrevemos $M(u) = v$ e $M(v) = u$;
  - para $X \subseteq V(G)$, dizemos M *cobre X* se cada vértice de X é extremo de alguma aresta em M;
  - M é *perfeito* se cobre $V(G)$;
  - M é maximal de não está contido em outro emparelhamento;
  - M é máximo se G não possui outro emparelhamento maior do que M;
  - se $v \in V(G)$ não é coberto por M, então v é dito *livre* (em M).
- Note que nem todo grafo possui um emparelhamento perfeito.
  - Qual o número de arestas que um emparelhamento perfeito tem?
  - Qual o maior número de arestas que um emparelhamento pode ter?
- Motivação: casamento estável, residentes e hospitais, doação de rins, ...
- Problemas de interesse:
  - Verificar se um dado emparelhamento é máximo.
  - Decidir se um grafo possui um emparelhamento perfeito.
  - Encontrar um emparelhamento de tamanho máximo em um grafo.
    * algoritmo de Egerváry (Húngaro) se G é bipartido: $O(VE)$
    * algoritmo de Hopcroft-Karp, se G é bipartido: $O(E \log V)$
    * algoritmo de Edmonds: $O(V^2E)$
    * algoritmo de Blum: $O(E \log V)$ (melhor conhecido)
- Seja M um emparelhamento em um grafo G:
  - um *caminho M-alternante* em G é um caminho cujas arestas alternam entre arestas de M e de $E(G) \setminus M$;
  - um *ciclo M-alternante* em G é um ciclo cujas arestas alternam entre arestas de M e de $E(G) \setminus M$;
- O teorema a seguir apresenta uma caracterização de emparelhamento máximo em qualquer grafo.

Teorema 14.1 (Berge, 1957)**.** *Seja G um grafo e M um emparelhamento em G. O emparelhamento M é máximo se e somente se G não possui um caminho M-alternante cujos extremos são livres.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se M é máximo, então G não possui um caminho M-alternante cujos extremos são livres. Seja M um emparelhamento máximo em G. Suponha, para fins de contradição, que exista um tal caminho P em G. Seja $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$. Note que nenhuma aresta de $M \setminus E(P)$ é incidente a vértices de P, pois os extremos de P são livres. Logo, M' é um emparelhamento. Como ambos extremos de P são livres, $|E(P) \setminus M| = |E(P) \cap M| + 1$. Então

$$\begin{aligned} |M'| &= |M \setminus E(P)| + |E(P) \setminus M| \\ &= |M \setminus E(P)| + |E(P) \cap M| + 1 \\ &= |M| + 1 \ , \end{aligned}$$

uma contradição.

Agora vamos provar que se G não possui um caminho M-alternante com extremos livres, então M é máximo. Suponha que nenhum caminho M-alternante em G tem os extremos livres e suponha, para fins de contradição, que M não é máximo. Seja então M' máximo (logo, $|M'| > |M|$). Seja $H = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$. Note que as componentes de H são caminhos ou ciclos cujas arestas alternam entre M e M'. Então $\Delta(H) \leq 2$. Além disso, cada ciclo de H tem um número par de arestas. Assim, como $|M'| > |M|$, ao menos uma componente de H é um caminho P que tem mais arestas de M' do que de M. As arestas nos extremos de P, portanto, são de M'. Mas então P é um caminho M-alternante com os extremos livres em M, uma contradição. $\square$

- Lembre-se que dado um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, o conjunto $\partial_G(S)$ é o conjunto de arestas $\{uv \in E(G) \colon u \in S \text{ e } v \notin S\}$, isto é, o conjunto de arestas que cruzam o corte $(S, V(G) \setminus S)$.

- O teorema a seguir nos dá uma caracterização de grafos bipartidos que possuem um emparelhamento que cobre uma parte.

  - Seu resultado implica que basta mostrar um subconjunto de X com poucos vizinhos para provar que G não possui um emparelhamento que cobre X, onde X é uma das partes da bipartição.

Teorema 14.2 (Hall, 1935). *Seja G um grafo conexo (X, Y)-bipartido, com $|X| \leq |Y|$. O grafo G possui um emparelhamento que cobre X se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que se G possui um emparelhamento que cobre X, então $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$. Seja M um emparelhamento de G que cobre X. Tome um $S \subseteq X$ qualquer. Para todo $u \in S$, o vértice $M(u)$ está em $N(S)$. Assim, $|N(S)| \geq |S|$.

Agora vamos provar que se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$, então G possui um emparelhamento que cobre X. Suponha, para fins de contradição, que G não possui um emparelhamento que cobre X. Seja M um emparelhamento máximo em G e seja $a \in X$ um vértice livre em M. Seja $Z = \{v \in V(G)\colon$ existe av-caminho M-alternante em $G\}$. Sejam $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Note que $a \in S$.

Considere um percurso em um caminho M-alternante que começa em a. Note que chegamos em T por arestas de $E(G) \setminus M$ e saímos de T por arestas de M. Exceto por a, chegamos em $S - a$ por arestas de M. Então, os vértices de T estão emparelhados aos vértices de $S - a$ por M. Ou seja, todo vértice de T é coberto por M e, portanto, $|T| = |S| - 1$ e $T = N(S)$. Assim, $|T| = |N(S)| = |S| - 1 < |S|$, contrariando a hipótese. □

14.2 Conjuntos independentes

- Seja I um conjunto independente em um grafo G:
  - I é maximal se não está contido em nenhum outro conjunto independente;
  - I é máximo se G não possui outro conjunto independente maior do que I;
- Denotamos por $\alpha(G)$ a cardinalidade de um conjunto independente máximo em G, também chamado *número de estabilidade de G*.
  - Em inglês, um conjunto independente pode ser chamado de *independent set* ou de *stable set*.
- Uma *clique* em um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que os vértices em S são dois a dois adjacentes.
  - Ou seja, $G[S]$ é um grafo completo.
- Novamente, um único vértice já é uma clique, então sempre é interessante encontrar cliques máximas.
  - Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade de uma clique máxima em G.
- O resultado a seguir implica que $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Teorema 14.3. *Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Então S é uma clique em G se e somente se S é um conjunto independente em $\overline{G}$.*

- Para mostrar resultados do tipo $\alpha(G) \geq k$, basta apresentar um conjunto independente que tenha tamanho k, ou então mostrar k vértices que com certeza tenham que fazer parte de qualquer conjunto independente em G.
- E para mostrar resultados do tipo $\alpha(G) \leq k$?
  - Por exemplo, $\alpha(G) \leq |V(G)|$.
  - Ou então, $\alpha(G) \leq |V(G)| - (\omega(G) - 1)$.

Lema 14.4. *Para todo grafo G, $\alpha(G) \leq \dfrac{|E(G)|}{\delta(G)}$.*

Demonstração. Seja X um conjunto independente máximo de G. Note que a quantidade de arestas que têm algum extremo em X é

$$\sum_{v \in X} d(v) \geq \sum_{v \in X} \delta(G) = |X|\delta(G) = \alpha(G)\delta(G) \ .$$

Por outro lado, a quantidade de arestas no grafo é $|E(G)| \geq \sum_{v \in X} d(v)$. Assim, $|E(G)| \geq \alpha(G)\delta(G)$, de onde o resultado segue. □

- O resultado do lema anterior não pode ser melhorado, pois $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor |E(C_n)|/\delta(C_n) \rfloor$.
- Por outro lado, $\alpha(K_n) = 1$ e $|E(K_n)|/\delta(K_n) = n/2$.

Lema 14.5. *Para todo grafo G, $\alpha(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$.*

Demonstração. Seja X um conjunto independente maximal em G. Note que todo vértice de $V(G) \setminus X$ tem pelo menos um vizinho em X, caso contrário X não seria maximal. Então

$$|V(G) \setminus X| \leq \sum_{v \in X} d(v) \ .$$

Por outro lado, todo vértice de X tem no máximo $\Delta(G)$ vizinhos. Então

$$\sum_{v \in X} d(v) \leq |X|\Delta(G) \ .$$

Juntando as duas inequações, temos

$$\begin{aligned} |V(G) \setminus X| &\leq |X|\Delta(G) \\ |V(G) \setminus X| + |X| &\leq |X|\Delta(G) + |X| \\ |V(G)| &\leq |X|(\Delta(G)+1) \ . \end{aligned}$$

E o resultado segue pois $|X| \leq \alpha(G)$. □

- O resultado do lema anterior não pode ser melhorado pois $\alpha(K_n) = 1 = \dfrac{n}{\Delta(K_n)+1}$.
- Por outro lado, $\alpha(K_{n,n}) = n$ mas $\dfrac{2n}{\Delta(K_{n,n})+1} = \dfrac{2n}{n+1} \approx 2$.

15 Aula 19: coloração de vértices e de arestas

- Seja G um grafo.
- Uma *k-coloração (própria)* de G é uma função $c\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ tal que $c(x) \neq c(y)$ para toda $xy \in E(G)$.
  - Cada inteiro $i \in \{1,\ldots,k\}$ é chamado de *cor*.
- Definição equivalente: é uma *partição* $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ de $V(G)$ em conjuntos independentes, isto é, $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e $V(G) = \cup_{i=1}^{k} C_i$.
  - Cada conjunto independente C_i é chamado de *classe de cor*.
- Uma *k-aresta-coloração (própria)* de G é uma função $c\colon E(G) \to \{1,\ldots,k\}$ tal que $c(xy) \neq c(xz)$ para todo $xy, xz \in E(G)$ e $y \neq z$.
- Definição equivalente: é uma *partição* $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$ de $E(G)$ em emparelhamentos.
- Claramente, todo grafo de ordem n possui uma n-coloração, assim como todo grafo com m arestas possui uma m-aresta-coloração, então o interessante nesses problemas é *minimizar* o número de cores usadas.
- Os dois problemas são "igualmente" difíceis.