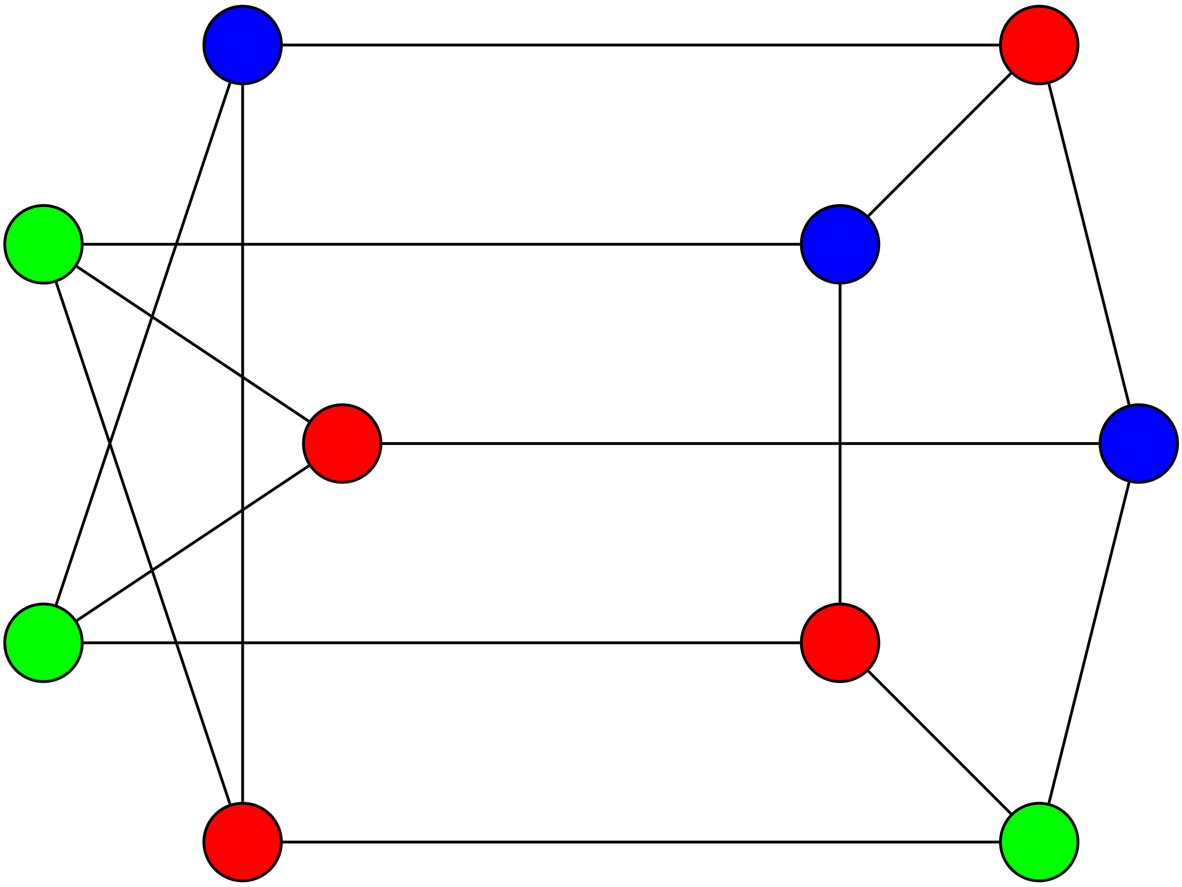
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos



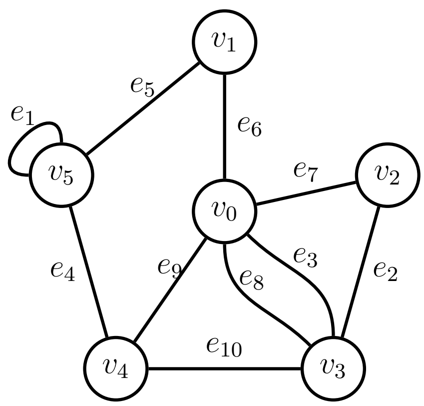
Esse material é um compilado dos seguintes:

- Sedgewick, R.. *Algorithms in C, part 5: graph algorithms.* 3rd ed. Addison-Wesley. 2002.
- Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.. *Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2008.
- Lintzmayer, C. N.; Mota, G. O.. *Notas de aulas - Análise de algoritmos e estruturas de dados.* Em construção.

1 Aula 2: conceitos e resultados elementares

- Um *grafo* G é uma tripla (V, E, ψ), onde:
  - V é um conjunto não vazio de elementos chamados *vértices*;
  - E é um conjunto de elementos chamados *arestas*, disjunto de V; e
  - ψ é a *função de incidência*, que associa uma aresta a um par não ordenado de vértices.
- Por exemplo, $H = (V, E, \psi)$ onde
  - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$
  - $\psi(e_1) = \{v_5, v_5\}$, $\psi(e_2) = \{v_2, v_3\}$, $\psi(e_3) = \{v_0, v_3\}$, $\psi(e_4) = \{v_4, v_5\}$, $\psi(e_5) = \{v_5, v_1\}$, $\psi(e_6) = \{v_0, v_1\}$, $\psi(e_7) = \{v_0, v_2\}$, $\psi(e_8) = \{v_0, v_3\}$, $\psi(e_9) = \{v_0, v_4\}$, $\psi(e_{10}) = \{v_3, v_4\}$

  é um grafo.
- Grafos permitem uma representação gráfica amigável:
  - círculos (bolinhas) representam vértices, e
  - uma aresta e é representada por uma linha que liga os círculos que representam os vértices x e y se $\psi(e) = \{x, y\}$.
- O grafo H dado acima pode ser visualizado na figura a seguir (note como V, E e ψ podem ser inferidas pelo desenho):

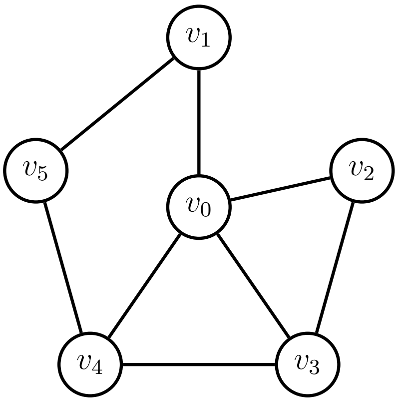


- Observe que não há um jeito único de desenhar um grafo, mas normalmente desenhamos um grafo e nos referimos ao desenho como se fosse o próprio grafo.

- Dado um grafo $G = (V, E, \psi)$:
  - usamos $V(G) = V$, usamos $E(G) = E$ e $\psi(G) = \psi$;
  - a *ordem* de G é $|V(G)|$;
  - arestas e e f são *paralelas* se $\psi(e) = \psi(f)$;
  - aresta e é um *laço* se $\psi(e) = \{v, v\}$ para algum $v \in V(G)$.

1.1 Grafos simples

- Um grafo G é *simples* se não contém laços nem arestas paralelas. Nesse caso, uma aresta pode ser unicamente determinada pelos seus extremos e $\psi(G)$ pode ser definida implicitamente fazendo com que $E(G)$ seja um conjunto de pares não ordenados de vértices.
  - Por exemplo, J onde $V(J) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E(J) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ é um grafo simples.
  - Sua representação gráfica é dada na figura a seguir:



- A partir de agora, o termo *grafo* será usado exclusivamente para denotar grafos simples. Se necessário, faremos a diferenciação usando o termo *multigrafo*.

Proposição 1.1. *Se G é um grafo de ordem n, vale que*

$$|E(G)| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \; .$$

1.2 Adjacência e vizinhança

- Seja G um grafo.
- Se $e \in E(G)$ e $e = \{u, v\}$, então:

  - e *liga* ou *conecta* u e v;
  - u e v são *vizinhos* ou *adjacentes*;
  - u e v são *extremos* de e;
  - e *incide* em u (e em v);
  - denotaremos $\{u, v\}$ simplesmente por uv (ou vu).

- A *vizinhança* de $u \in V(G)$, denotada $N_G(u)$ ou apenas $N(u)$, é o conjunto que contém os de vizinhos de u, isto é, $\{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$ (N de *neighborhood*).
- Arestas que têm um extremo em comum também são chamadas de *adjacentes*.

1.3 Grau

- Seja G um grafo.
- O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado $d_G(v)$ ou $d(v)$, é o número de arestas incidentes a v (d de *degree*).
- Note que $d_G(v) = |N_G(v)|$.
  - se G é um multigrafo, podemos ter $d_G(v) \neq |N_G(v)|$ para algum $v \in V(G)$.
- Se $d(v) = 0$, v é dito *isolado*.
- O *grau mínimo* de G, denotado $\delta(G)$, é o menor grau dentre os graus de todos os vértices de G, isto é,

$$\delta(G) = \min\{d_G(u) : u \in V(G)\} \ .$$

- O *grau máximo* de G, denotado $\Delta(G)$, é o maior grau dentre os graus de todos os vértices de G, isto é,

$$\Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\} \ .$$

1.4 Isomorfismo

Sejam G e H dois grafos.

- Dizemos que G e H são *idênticos* se $V(G) = V(H)$ e $E(G) = E(H)$.

- Se G e H apresentam estruturas idênticas quando ignoramos os rótulos dos vértices e arestas, então dizemos que G e H são *isomorfos*.
- Formalmente, G e H são *isomorfos* se existe uma bijeção $f : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ se e somente se $f(u)f(v) \in E(H)$.
- Um desenho de um grafo sem rótulos pode ser visto como um representante da *classe de equivalência* dos grafos isomorfos.

1.5 Algumas classes de grafos

Um grafo G é:

- *vazio* se $E(G) = \emptyset$.
- *trivial* se $|V(G)| = 1$ e $E(G) = \emptyset$.
- *k-regular* se todos os seus vértices possuem grau k, onde $k \in \mathbb{Z}^+$.
- *regular* se ele é k-regular para algum k.
- *completo* se $uv \in E(G)$ para todo $u, v \in V(G)$:
  - a menos de isomorfismo, só há um grafo completo de ordem n, que é denotado K_n;
  - ele é $(n-1)$-regular;
  - o grafo K_3 é chamado de *triângulo*;
  - todo K_n tem $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arestas.
- *planar* se pode ser desenhado no plano de forma que as arestas se intersectem apenas nos seus extremos.

O *complemento* de G é o grafo $\overline{G}$ tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{uv \colon uv \notin E(G)\}$.

- note que $|E(G)| + |E(\overline{G})| = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.6 Subgrafos

- Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$:
  - dizemos que G *contém* H;

- dizemos que G é *supergrafo* de H;
- escrevemos $H \subseteq G$.

- Note que todo grafo H de ordem no máximo n é subgrafo do K_n.
- Um grafo H é *subgrafo gerador* de G se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.
- Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$:
  - o subgrafo de G *induzido por S*, denotado $G[S]$, é o subgrafo tal que $V(G[S]) = S$ e $E(G[S])$ contém todas as arestas de G que possuem ambos extremos em S, isto é, $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$;
  - o subgrafo de G criado pela remoção dos vértices em S, denotado $G - S$, é isomorfo ao subgrafo $G[V(G) \setminus S]$;
  - abuso de notação: para um $v \in V(G)$, $G - v = G - \{v\}$.
- Seja G um grafo e $F \subseteq E(G)$:
  - o subgrafo de G *induzido por F*, denotado $G[F]$, é o subgrafo tal que $E(G[F]) = F$ e $V(G[F])$ contém todos os vértices de G que são extremos de alguma aresta em F ($V(G[F]) = \{v \in V(G) : \exists vu \in F\}$);
  - o subgrafo de G criado pela remoção das arestas em F, denotado $G - F$, é o subgrafo tal que $V(G - F) = V(G)$ e $E(G - F) = E(G) \setminus F$;
  - abuso de notação: para uma $e \in E(G)$, $G - e = G - \{e\}$.

1.7 Aperto de mãos

O teorema a seguir estabelece uma relação identidade fundamental que relaciona os graus dos vértices com o número de arestas em um grafo.

Teorema 1.2 (Aperto de mãos)**.** *Para todo grafo G temos que* $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$.

Demonstração. Uma aresta $uv \in E(G)$ é contada duas vezes na soma dos graus, uma em $d_G(u)$ e outra em $d_G(v)$. □

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução em $m = |E(G)|$.

No caso base, $m = 0$, o que significa que o grau de todo vértice é 0 e, portanto, $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 0$ e o resultado vale.

Considere agora um grafo G com $m > 0$ arestas e suponha que para todo grafo H com $0 \leq |E(H)| < m$, vale que $\sum_{v \in V(H)} d_H(v) = 2|E(H)|$.

Seja xy uma aresta de G e seja $G' = G - xy$. Note que, por hipótese de indução, vale que $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2|E(G')|$.

Por construção, temos que $|E(G')| = |E(G)| - 1$, $d_G(x) = d_{G'}(x) + 1$, $d_G(y) = d_{G'}(y) + 1$ e $d_G(v) = d_{G'}(v)$ para todo $v \in V(G) \setminus \{x, y\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(G)} d_G(v) &= d_G(x) + d_G(y) + \sum_{v \in V(G) \setminus \{x,y\}} d_G(v) \\
&= d_{G'}(x) + d_{G'}(y) + 2 + \sum_{v \in V(G) \setminus \{x,y\}} d_{G'}(v) \\
&= 2 + 2|E(G')| = 2|E(G)| \quad .
\end{aligned}$$

□

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução em $n = |V(G)|$. □