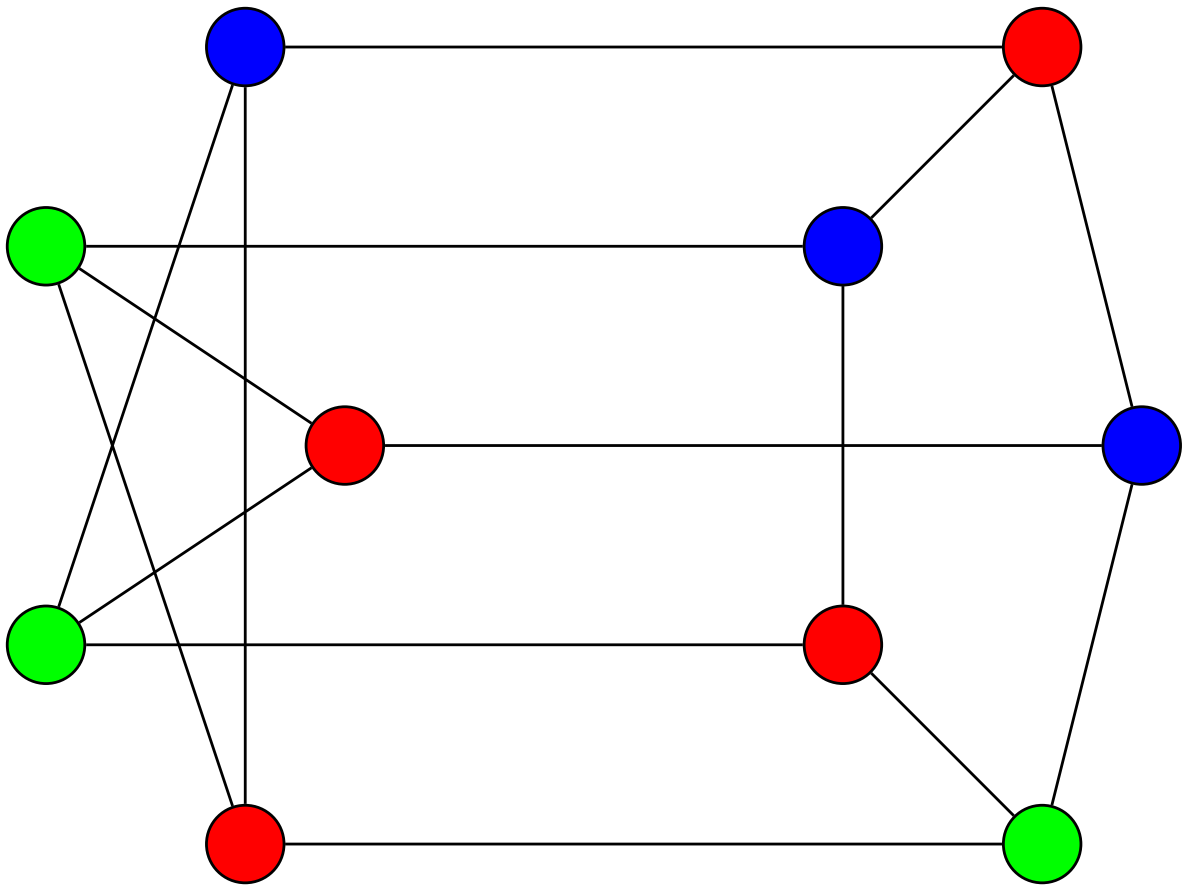
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROFA. CARLA NEGRI LINTZMAYER

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos



Esse material é um compilado dos seguintes:

- Sedgewick, R.. *Algorithms in C, part 5: graph algorithms.* 3rd ed. Addison-Wesley. 2002.
- Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.. *Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2008.
- Lintzmayer, C. N.; Mota, G. O.. *Notas de aulas - Análise de algoritmos e estruturas de dados.* Em construção.

2 Aula 3: conceitos e resultados elementares

Corolário 2.1. *Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Para fins de contradição, suponha que existe um grafo G cujo número de vértices de grau ímpar é ímpar. Seja I o conjunto de vértices de grau ímpar de G e P o conjunto de vértices de grau par. Assim, $V(G) = I \cup P$. Para cada $v \in I$, seja r_v o inteiro tal que $d(v) = 2r_v + 1$. Para cada $v \in P$, seja s_v o inteiro tal que $d(v) = 2s_v$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V(G)} d(v) &= \sum_{v \in I} d(v) + \sum_{v \in P} d(v) \\ &= \sum_{v \in I} (2r_v + 1) + \sum_{v \in P} (2s_v) \\ &= 2\sum_{v \in I} r_v + \sum_{v \in I} 1 + 2\sum_{v \in P} s_v \\ &= 2\left(\sum_{v \in I} r_v + \sum_{v \in P} s_v\right) + |I| \ ,\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.2, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \ .$$

Juntando as duas equações e isolando $|I|$, temos

$$|I| = 2\left(|E(G)| - \sum_{v \in I} r_v - \sum_{v \in P} s_v\right) \ ,$$

o que é uma contradição com $|I|$ ser ímpar. $\square$

Teorema 2.2. *Todo grafo com ao menos dois vértices possui ao menos um par de vértices com o mesmo grau.*

Demonstração. Seja G um grafo simples de ordem n tal que $n \geq 2$. Note que para qualquer $v \in V(G)$ vale que $0 \leq d(v) \leq n - 1$. Também note que G contém um vértice de grau $n - 1$ se e somente se G não contém um vértice de grau 0.

Seja X o conjunto dos graus de G, isto é, $X = \{d(u) \colon u \in V(G)\}$. Pela observação acima, temos que $X \subseteq \{0, 1, \ldots, n-2\}$ ou $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Portanto, $|X| \leq n - 1$. Assim, pelo Princípio da Casa dos Pombos, vale que ao menos dois vértices devem possuir o mesmo grau. □

2.1 Passeios, trilhas, caminhos e ciclos

Seja G um grafo.

- Um *passeio* é uma sequência de vértices $W = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ tal que $v_i \in V(G)$ para $1 \leq i \leq k+1$ e $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k$.
  - v_1 e v_{k+1} são *extremos* do passeio;
  - W é um *$v_1 v_{k+1}$-passeio*;
  - $v_2, \dots, v_k$ são *vértices internos* do passeio;
  - o *comprimento* do passeio é o número de arestas nele (k);
  - é *fechado* se sua origem e término são iguais.
- É comum ver W como o grafo em que $V(W) = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ e $E(W) = \{v_i v_{i+1} \colon 1 \leq i \leq k\}$.
- Uma *trilha* é um passeio que não repete arestas.
- Uma *trilha fechada* é um passeio fechado que não repete arestas.
- Um *caminho* é um passeio que não repete vértices.
- Um *ciclo* é um passeio fechado de comprimento ≥ 3 que não repete vértices internos.
- Um grafo que é apenas um caminho com n vértices é denotado por P_n.
- Um grafo que é apenas um ciclo com n vértices é denotado por C_n.
- A *distância* entre dois vértices u e v, denotada $\mathrm{dist}_G(u, v)$, é a menor quantidade de arestas de um uv-caminho em G, ou ∞ se não houver caminho entre u e v em G.

Teorema 2.3. *Seja G um grafo e sejam $x, y \in V(G)$. Se existe um xy-passeio em G, então existe um xy-caminho em G.*

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução no comprimento k do passeio.

Se $k = 0$, então o passeio já é um caminho trivial e o resultado segue.

Suponha que $k > 0$ e que qualquer xy-caminho de comprimento menor do que k contém um xy-passeio.

Seja $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um xy-passeio em G de comprimento k, com $x = v_0$

e $y = v_k$. Se todos os vértices de W são distintos, então W é um caminho e não há nada a provar. Então suponha que existe ao menos um vértice que se repete em W. Seja v_i o vértice com menor valor i que se repete em W e seja v_j sua primeira repetição (portanto $i < j$).

Construa $Q = (v_0, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_k)$ a partir de W. Note que Q é um xy-passeio de comprimento menor do que k. Portanto, por hipótese, vale que Q contém um xy-caminho $P = (v_0, u_1, u_2, \ldots, u_t, v_k)$. Como Q está contido em W, P também está contido em W e o resultado segue. □

Teorema 2.4. *Se G é um grafo com $\delta(G) \geq 2$, então G contém um caminho de comprimento pelo menos $\delta(G)$ e um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.*

Demonstração. Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho maximal em G. Note que todo vizinho de v_k está em P. Como $d(v_k) \geq \delta(G)$, v_k tem pelo menos $\delta(G)$ vizinhos e, assim, P tem comprimento pelo menos $\delta(G)$. Seja i o menor índice tal que $v_i v_k \in E(G)$. O ciclo $C = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i)$ tem pelo menos $\delta(G)+1$ arestas pois contém v_k e todos os seus vizinhos. □

Lema 2.5. *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau 1.*

A *cintura* de um grafo G, denotada $g(G)$, é a quantidade de arestas do menor ciclo de G (ciclo mínimo), ou ∞ se G não tem ciclos (g de *girth*).

Teorema 2.6. *Se G é um grafo k-regular com $g(G) = 4$, então G tem pelo menos $2k$ vértices.*

Demonstração. Seja G um grafo k-regular com $g(G) = 4$. Considere $v \in V(G)$ qualquer. Note que $|N(v)| = d(v) = k$. Como G não tem triângulos, então não existem arestas em $G[N(v)]$. Assim, um vértice $u \in N(v)$ tem como vizinhos v e outros $k-1$ vértices fora de $N(v)$. Então $|V(G)| \geq 1+|N(v)|+(|N(u)|-1) = 2k$. □

Teorema 2.7. *Seja G um grafo no qual todos os vértices têm grau pelo menos 2. Então G contém um ciclo.*

Demonstração. Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ um caminho mais longo em G. Como o grau de v_k é pelo menos 2, ele tem algum vizinho v diferente de v_{k-1}. Se v não estiver em P, então P poderia ser aumentado, uma contradição. Então $v = v_i$ para algum i, $0 \leq i \leq k-2$, e $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i)$ é um ciclo em G. □

Demonstração. Se todos os vértices têm grau pelo menos 2, então $\delta(G) \geq 2$. Pelo Teorema 2.4, vale que G tem um ciclo. $\square$

2.2 Maximal e máximo

- O termo *maximal* está relacionado com o conceito de inclusão:
  - um subgrafo com uma propriedade X é *maximal* se não está contido em outro subgrafo que tem a mesma propriedade X.
- O termo *máximo* está relacionado com o conceito de quantidade:
  - um subgrafo com uma propriedade X é *máximo* se não existe nenhum outro subgrafo que tem a mesma propriedade X e tenha tamanho maior do que o primeiro.

2.3 Conexidade

- Um grafo G é dito *conexo* se existe um uv-caminho para todo par $u, v \in V(G)$.
- Um grafo que não é conexo é dito *desconexo*.
- Um grafo desconexo consiste de um conjunto de *componentes conexas*, que são subgrafos conexos maximais.
- Uma aresta $e \in E(G)$ tal que $G - e$ tem mais componentes conexas do que G é uma *aresta de corte* ou *ponte*.
- Um vértice $v \in V(G)$ tal que $G - v$ é um grafo com mais componentes conexas do que G é um *vértice de corte* ou *articulação*.

Teorema 2.8. *Se G é um grafo conexo, então $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.*

Demonstração. Vamos provar esse resultado por indução em $|V(G)|$.

No caso base, quando $|V(G)| = 1$, devemos ter $|E(G)| = 0$ e, portanto, claramente o resultado vale.

Considere então um grafo G com $|V(G)| > 1$ vértices e suponha que todo grafo conexo com k vértices, $1 \leq k < |V(G)|$, tem pelo menos $k - 1$ arestas.

Note que se $\delta(G) \geq 2$, então temos $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2|V(G)|$, de onde temos $|E(G)| \geq |V(G)|$ e, portanto, o resultado vale. Podemos então assumir que existe um vértice $v \in V(G)$ tal que $d_G(v) = 1$. Seja $G' = G - v$. Claramente, G' é conexo e $|V(G')| = |V(G)| - 1$. Então por hipótese de indução temos que $|E(G')| \geq |V(G')| - 1$. Como $|E(G')| = |E(G)| - 1$, temos

$$|E(G)| - 1 = |E(G')| \geq |V(G')| - 1 = |V(G)| - 2 \ ,$$

de onde concluímos que $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$. □

O teorema a seguir caracteriza arestas de corte em grafos.

Teorema 2.9. *Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se $e = xy$ é aresta de corte, então e não pertence a nenhum ciclo. Suponha, para fins de contradição, que e pertence a um ciclo $C = (x, v_1, \ldots, v_p, y, x)$. Seja $G' = G - e$. Por definição, G' tem mais componentes conexas do que G e note que x e y estão em componentes diferentes de G'. Contudo, o caminho $(x, v_1, \ldots, v_p, y)$ está em G', um absurdo.

Agora vamos mostrar que se $e = xy$ não pertence a nenhum ciclo, então e é uma aresta de corte. Suponha, para fins de contradição, que e não é de corte. Seja $G' = G - e$. Como e não é de corte, G' tem as mesmas componentes conexas de G, o que significa que existe caminho P entre x e y em G' que não usa e. Esse caminho P juntamente com a aresta e forma um ciclo em G, uma contradição. □

Proposição 2.10. *Se u e v são os únicos vértices de grau ímpar em um grafo G, então existe um uv-caminho em G.*