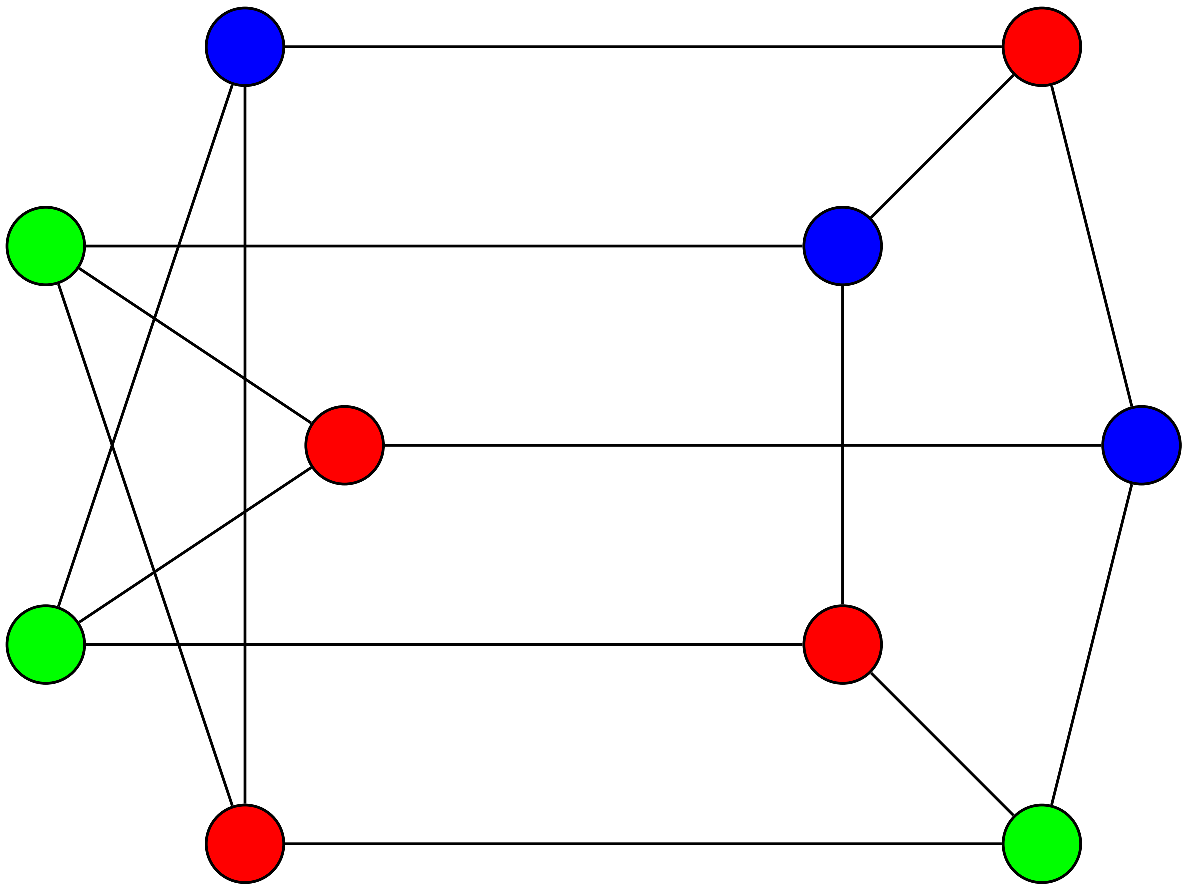
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos



Esse material é um compilado dos seguintes:

- Sedgewick, R.. *Algorithms in C, part 5: graph algorithms.* 3rd ed. Addison-Wesley. 2002.
- Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.. *Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2008.
- Lintzmayer, C. N.; Mota, G. O.. *Notas de aulas - Análise de algoritmos e estruturas de dados.* Em construção.

3 Aula 4: grafos bipartidos

Dado um grafo G qualquer, $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto independente* ou *conjunto estável* se para todo par $u, v \in S$, vale que $uv \notin E(G)$.

Um grafo G é:

- *bipartido* se $V(G)$ pode ser *particionado* em dois conjuntos X e Y ($X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$) tais que X e Y são conjuntos independentes:
  - ou seja, toda aresta de G tem um extremo em X e outro em Y;
  - dizemos que G é (X, Y)-*bipartido*;
  - é comum denotar tal grafo por $G[X, Y]$;
  - se $r = |X|$ e $s = |Y|$, então $|E(G)| \leq rs$.
- *bipartido completo* se é (X, Y)-bipartido e todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y:
  - o grafo (X, Y)-bipartido completo com $p = |X|$ e $q = |Y|$ é denotado $K_{p,q}$.

Proposição 3.1. *Todo caminho é bipartido.*

O teorema a seguir dá uma condição *suficiente* para um grafo não ser bipartido.

Teorema 3.2. *Seja G um grafo com n vértices. Se G tem mais do que $n^2/4$ arestas, então G não é bipartido.*

Demonstração. Seja G um grafo com mais do que $n^2/4$ arestas e, para fins de contradição, suponha que G é bipartido. Seja (X, Y) a bipartição de G, com $x = |X|$ e $y = |Y|$. Então temos

$$|E(G)| > \frac{n^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4} \quad .$$

Além disso, como G é bipartido, $xy \geq |E(G)|$. Assim,

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &< 4xy \\
x^2 + 2xy + y^2 - 4xy &< 0 \\
x^2 - 2xy + y^2 &< 0 \\
(x-y)^2 &< 0 \quad ,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. $\square$

Será que é possível diminuir mais?

- Não, pois o $K_{n/2,n/2}$ tem exatamente $n^2/4$ arestas.

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja bipartido. Ele dá uma *caracterização* para grafos bipartidos.

Teorema 3.3. *Um grafo G é bipartido se e somente se G não contém ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se G é (X, Y)-bipartido, então G não contém ciclos de comprimento ímpar. Se G não tem ciclo algum, então não há o que provar. Logo, seja $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ um ciclo qualquer de G. Sem perda de generalidade, assuma que $v_1 \in X$. Vamos mostrar que para i ímpar, com $1 \leq i \leq k$, $v_i \in X$, por indução em i.

Claramente, $v_1 \in X$. Seja agora $i \geq 3$ ímpar e suponha que $v_j \in X$ para todo j ímpar tal que $1 \leq j < i$. Por causa do ciclo, sabemos que $v_{i-2}v_{i-1} \in E(G)$. Por hipótese, $v_{i-2} \in X$. Como G é bipartido, então só pode ser o caso de $v_{i-1} \in Y$. Da mesma forma, $v_{i-1}v_i \in E(G)$ implica $v_i \in X$.

Por fim, como $v_k v_1 \in E(G)$, podemos concluir que $v_k \in Y$. Como todo v_i com i ímpar está em X, então também concluímos que k é par. Então todo ciclo de G é par.

Agora vamos mostrar que se G não contém ciclos ímpares, então G é bipartido. Seja G um grafo sem ciclos ímpares e assuma, sem perda de generalidade, que G é conexo. Tome um vértice x qualquer e defina $X = \{v \in V(G) \colon \text{dist}_G(x, v) \text{ é par }\}$ e $Y = \{v \in V(G) \colon \text{dist}_G(x, v) \text{ é ímpar }\}$. Por definição, $X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$. Então, basta provar que X e Y são conjuntos independentes para termos uma (X, Y)-partição de G.

Inicialmente tome dois vértices u e v em X. Considere P_{xu} e Q_{xv} como sendo caminhos mais curtos entre x e u e entre x e v, respectivamente.

Como x é um vértice que está em ambos os caminhos, então existe pelo menos um vértice w em comum nesses caminhos. Seja $P_{xu} = (x, v_1, v_2, \ldots, v_i, w, v_{i+1}, \ldots, v_p, u)$ e $Q_{xv} = (x, u_1, u_2, \ldots, u_j, w, u_{j+1}, \ldots, u_q, v)$ onde nenhum vértice em $\{v_{i+1}, \ldots, v_p\}$ está em Q_{xv} e nenhum vértice em $\{u_{j+1}, \ldots, u_q\}$ está em P_{xu} (w é o último vértice em comum dos dois caminhos). Note primeiramente que $i = j$ pois P_{xu} e Q_{xv} são caminhos mais curtos. Como u e v estão em X, P_{xu} e Q_{xv} têm quantidade par de arestas cada um. Sejam $P_{wu} = (w, v_{i+1}, \ldots, v_p, u)$ e $Q_{wv} = (w, u_{j+1}, \ldots, u_q, v)$. Temos então que $|E(P_{wu})| + |E(Q_{wv})|$ é par. Como $(u, v_p, \ldots, v_{i+1}, w, u_{j+1}, \ldots, u_q, v)$ é um caminho, se uv existisse em $E(G)$ teríamos um ciclo de comprimento ímpar em G. Como escolhemos u e v arbitrariamente, concluímos que X é um conjunto independente.

De forma análoga podemos mostrar que não há arestas entre vértices de Y. $\square$