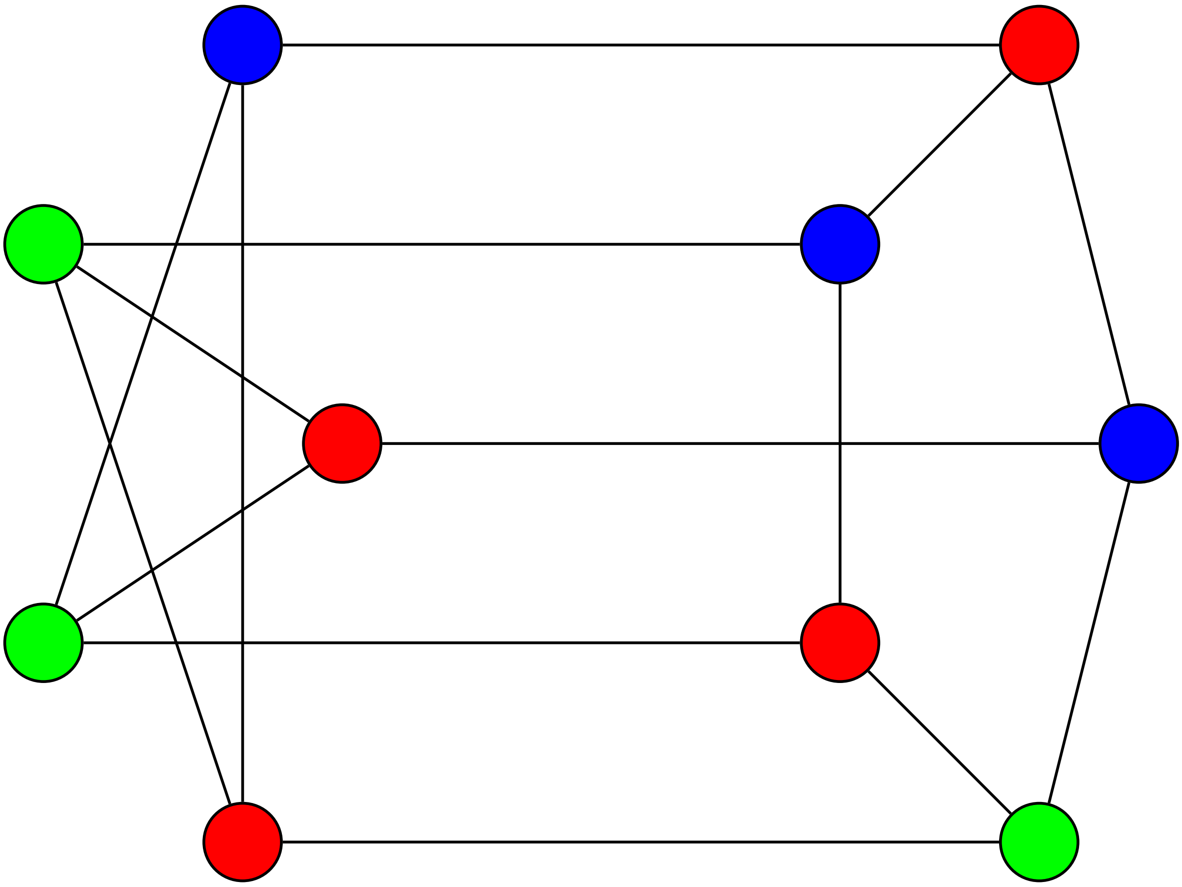
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos



Esse material é um compilado dos seguintes:

- Sedgewick, R.. *Algorithms in C, part 5: graph algorithms.* 3rd ed. Addison-Wesley. 2002.
- Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.. *Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2008.
- Lintzmayer, C. N.; Mota, G. O.. *Notas de aulas - Análise de algoritmos e estruturas de dados.* Em construção.

4 Aula 5: árvores

Um grafo G é:

- *acíclico* se não contém ciclos.
- uma *árvore* se é conexo e acíclico.
- uma *floresta* se é acíclico.

Em árvores e florestas, chamamos de *folha* um vértice que tenha grau 1.
Sabemos que todo grafo conexo G tem $|V(G)| - 1 \leq |E(G)| \leq \dfrac{|V(G)|(|V(G)| - 1)}{2}$:

- É verdade que se $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$, então G é conexo?
- Existem grafos com $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$ que são conexos?
- E com $|E(G)| = |V(G)| - 1$? O que esses grafos têm em comum?
- Se G é conexo com $|E(G)| = |V(G)| - 1$, então G não tem ciclos?

Vamos relacionar ase seguintes propriedades nos resultados a seguir: ser conexo, não conter ciclos e ter $|V(G)| - 1$ arestas.

Lema 4.1. *Se G é um grafo conexo com $|E(G)| = |V(G)| - 1$, então G não tem ciclos.*

Demonstração. Seja G conexo com $|E(G)| = |V(G)| - 1$ e suponha, por contradição, que G contém um ciclo C. Seja $e \in E(C)$ e seja $G' = G - e$. Pelo Teorema 2.9, a aresta e não é de corte e, portanto, G' é conexo. Note que $|V(G')| = |V(G)| = n$ e $|E(G')| = |E(G)| - 1 = n - 2$, contrariando o Teorema 2.8. □

Demonstração. Seja G conexo com $|E(G)| = |V(G)| - 1$ e suponha, por contradição, que G contém um ciclo C. Seja $H = G - V(C)$ e sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de H. Como cada G_i é conexa, pelo Teorema 2.8, vale que $|E(G_i)| \geq |V(G_i)| - 1$. E como G é conexo, então existe ao menos uma aresta entre C e G_i, para todo i. Então $|E(G)| \geq |E(C)| + \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| + k \geq |E(C)| + \sum_{i=1}^{k}(|V(G_i)| - 1) + k = |E(C)| + \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| - k + k = n$, o que é uma contradição, pois $|E(G)| = |V(G)| - 1$. □

Lema 4.2. *Se G é um grafo conexo e acíclico, então $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

Demonstração. Vamos provar por indução no número de vértices de G.

No caso base, se $|V(G)| = 1$, o grafo não tem arestas. Logo, $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Considere então um grafo G conexo e sem ciclos com $|V(G)| > 1$ vértices e suponha que todo grafo conexo e sem ciclos com k vértices, para $1 \leq k < |V(G)|$, tem exatamente $k - 1$ arestas.

Note que existe um vértice $v \in V(G)$ com $d_G(v) = 1$, pelo Lema 2.5. Note ainda que $G' = G - v$ é conexo, não tem ciclos e tem $|V(G)| - 1$ vértices. Então por hipótese, $|E(G')| = |V(G')| - 1 = |V(G)| - 2$. Como $|E(G')| = |E(G)| - 1$, então $|E(G)| = |V(G)| - 1$. $\square$

Lema 4.3. *Se G é um grafo acíclico com $|E(G)| = |V(G)| - 1$, então G é conexo.*

Demonstração. Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G. Note que $\sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| = |V(G)|$ e $\sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| = |E(G)|$. Cada G_i é acíclico e conexo, então, pelo Lema 4.2, $|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1$. Somando para todos os componentes,

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| = \sum_{i=1}^{k} (|V(G_i)| - 1) = |V(G)| - k \ .$$

Sabemos, por hipótese, que $|E(G)| = |V(G)| - 1$, de forma que k só pode ser 1. Logo, G é conexo. $\square$

Teorema 4.4. *Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E(G)$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

(d) G é conexo e $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

(e) G é acíclico e $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

Demonstração. Para concluir o resultado, note que basta mostrar que se (a) então (b), se (b) então (c), se (c) então (d), se (d) então (e), se (e) então (f) e se (f) então (a).

Primeiro suponha que vale (a). Para fins de contradição, suponha que existem vértices $u, v \in V(G)$ tais que existem dois uv-caminhos distintos P e Q. Seja xw a primeira aresta de Q que não pertence a P. Ela pertence a um subcaminho maximal de Q que não possui arestas de P e vai até um vértice y. Esse subcaminho juntamente com o subcaminho de P que vai de x a y forma um ciclo em G, uma contradição. Portanto, (b) vale.

Agora suponha que vale (b). Então claramente G é conexo. Agora suponha por contradição que nem toda aresta de G é de corte. Seja e uma tal aresta. Então pelo Teorema 2.9, e pertence a um ciclo $C = (u, \ldots, v, u)$ de G. Claramente, existem dois caminhos distintos entre u e v, uma contradição. Portanto, (c) vale.

Agora suponha que vale (c). Seja G conexo onde toda aresta é de corte. Então pelo Teorema 2.9, nenhuma aresta de G pertence a ciclos, ou seja, G é acíclico. Pelo Lema 4.2, $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Portanto, vale (d).

Agora suponha que (d) vale. Se G é conexo e $|E(G)| = |V(G)| - 1$, então pelo Lema 4.1 temos que G é acíclico. Portanto, vale (e).

Agora suponha que (e) vale. Seja G acíclico com $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Pelo Lema 4.3, G é conexo. Então G é uma árvore, por definição. Como (a) implica (b), todo par de vértices possui um único caminho entre eles. Sejam u e v dois vértices de G que não são adjacentes. Então $G + uv$ tem um único ciclo. Logo, (f) vale.

Por fim, suponha que (f) vale. Então G é acíclico e resta mostrar que ele é conexo. Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $G + uv$ tem um único ciclo, então existe um uv-caminho. Logo, G é conexo. Portanto, vale (a). $\square$

O resultado a seguir caracteriza vértices de corte em árvores.

Teorema 4.5. *Seja T uma árvore. Um vértice $v \in V(T)$ é de corte se e somente se ele não é uma folha.*