6. Sejam T e T' árvores geradoras de G. Para cada aresta $e \in T \backslash T'$, prove que existe uma aresta $f \in T' \backslash T$ tal que $T' - f + e$ e $T - e + f$ são geradoras.

árvores!

Seja $e = xy \in E(T) \setminus E(T')$. Note que $T - e$ tem exatamente duas componentes conexas T_1 e T_2 que são árvores, pois e é aresta de corte (Teorema 4.4, aula5.pdf). Note que $(V(T_1), V(T_2))$ é um corte em G, já que $V(T_2) = V(G) \setminus V(T_1)$.

Sabemos, pelo Teorema 4.4, aula5.pdf, que $T' + e$ tem exatamente um ciclo C'.

Pelo Lema 8.3, aula10.pdf, existe uma aresta f de C' que tem um extremo em $V(T_1)$ e outro em $V(T_2)$ (cruza o corte).

Então $T - e + f$ é conexo (vértices de $V(T_1)$ têm caminho para $V(T_2)$ por meio de f).

Também $T - e + f$ é acíclico (f é sozinha no corte $(V(T_1), V(T_2))$).

Claramente $V(T - e + f) = V(G)$.

Logo, $T - e + f$ é árvore geradora.

Agora note que, como $T' + e$ tem exatamente um ciclo e f é aresta desse ciclo, $T' + e - f$ é acíclico.

Como $|E(T' + e - f)| = |V(G)| - 1$ e $|V(T' + e - f)| = |V(G)|$, concluímos que $T' + e - f$ é árvore geradora.

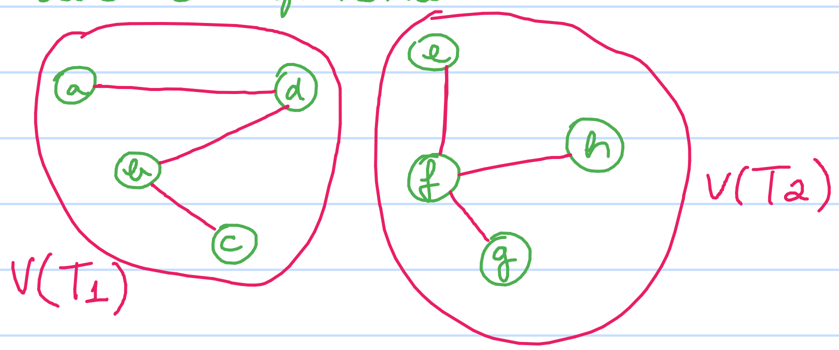
CQD

explicação com desenho:

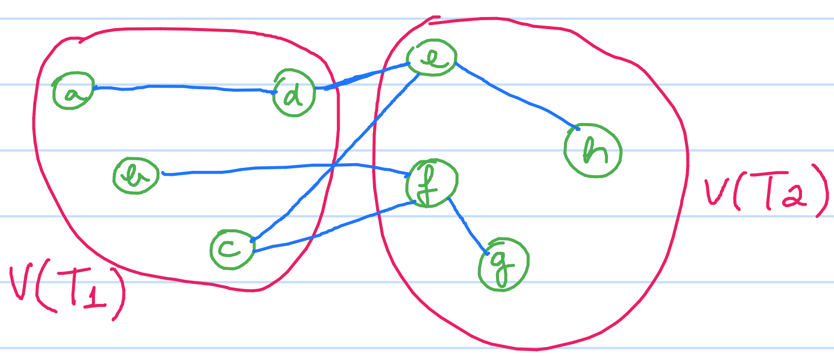
T e T' têm os mesmos vértices, $V(G)$:

(podem ter arestas em comum também, mas $E(T) \neq E(T')$)

Então tome $e \in E(T) \setminus E(T')$. Por exemplo, df.
$T - df$ tem duas componentes:

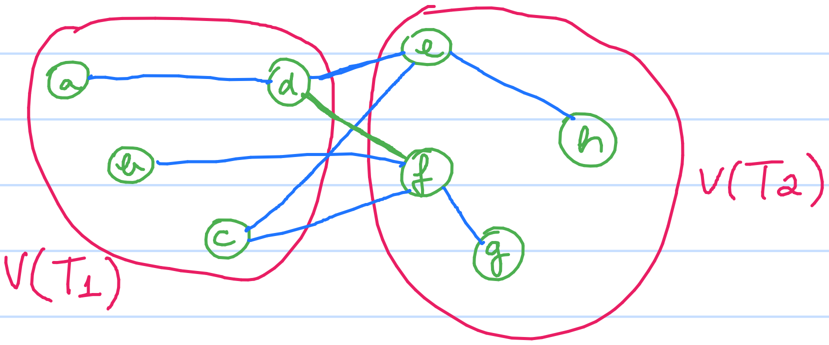


$(V(T_1); V(T_2))$ é um corte em G.
Veja como T' "interage" com esse corte:



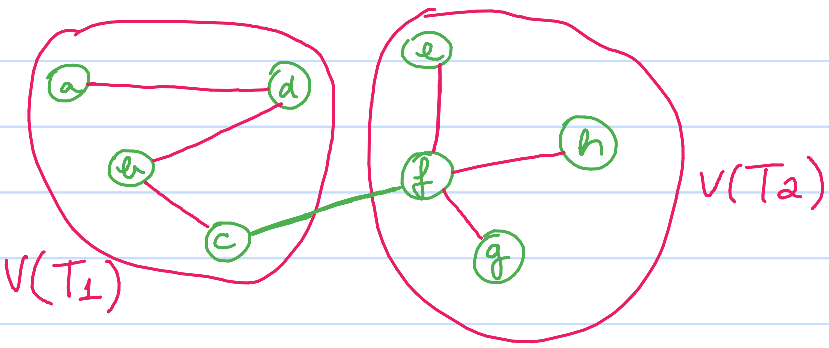
Várias arestas de T' cruzam esse corte, senão T' seria desconexo!

Agora veja $T' + df$ nesse corte:

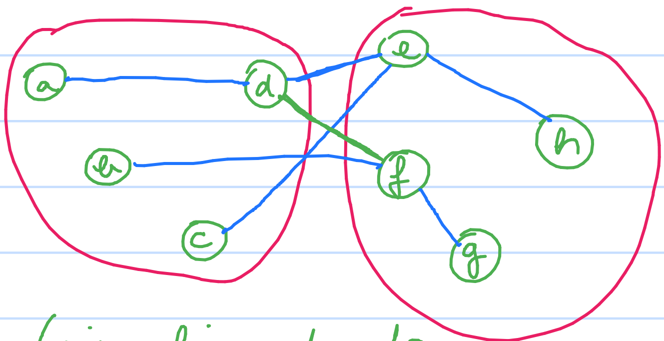


(veja que nesse exemplo duas arestas do ciclo em $T' + df$ cruzam o corte. Sempre é garantido alguma.)

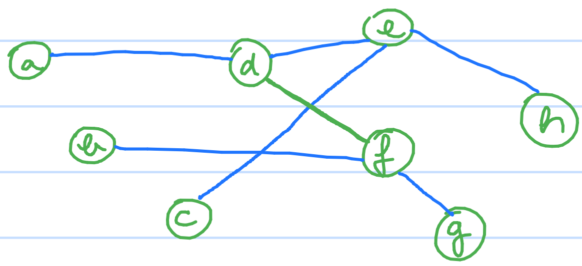
Agora observe que $T - df + cf$ volta a ser árvore geradora:



Assim como $T' + df - cf$:



ou



(visualizando do ponto de vista do corte)

AGM

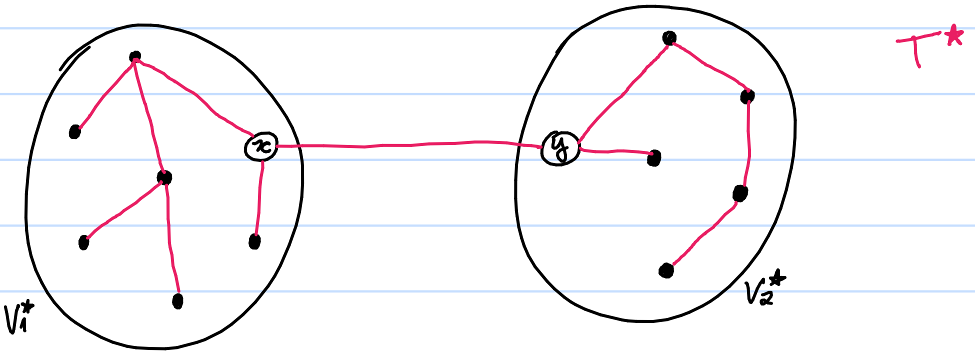
7. Seja G um grafo, $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$ e seja e T uma árvore geradora mínima de G sobre ω. Sejam $x, y \in V(G)$ com $xy \notin E(G)$ e seja $G' = G + xy$. Considere $\omega'\colon E(G') \to \mathbb{R}$ de forma que $\omega'(e) = \omega(e)$ para toda $e \in G$ e $\omega'(xy)$ foi bem definido. Seja uv uma aresta de maior peso no ciclo existente em $T + xy$. Prove que $T + xy - uv$ é uma árvore geradora mínima de G'.

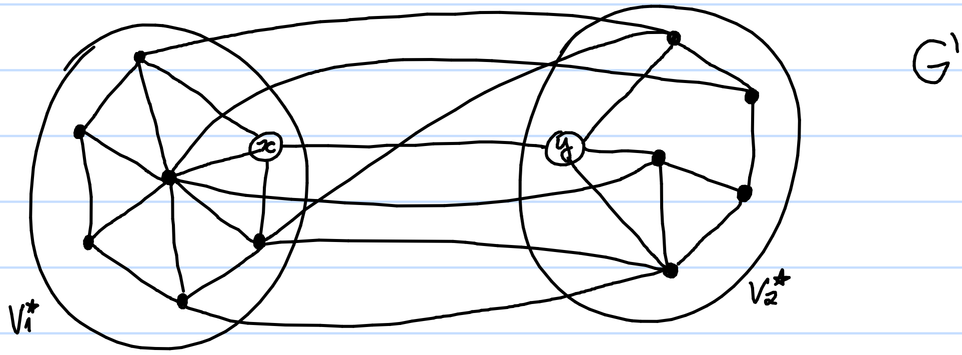
Seja T A.G.M de (G, w).
Seja (G', w') como no enunciado.
Seja uv uma aresta de maior peso no ciclo de $T + xy$.
Seja $T' = T + xy - uv$.
Claramente, T' é árvore e é geradora em G'.

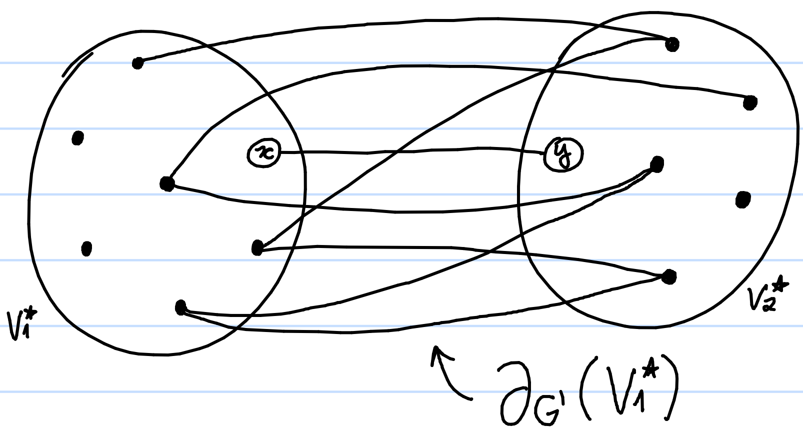
Vamos provar que T' é mínima para (G', w'), isto é, que $w'(T') \leq w'(H)$ para qualquer outra árvore geradora H de G'. Vamos fazer isso por contradição.
Suponha que T' não é mínima para (G', w').
Seja T^* mínima para (G', w'). Logo, por definição,
$$w'(T^*) < w'(T'). \qquad \text{FATO 1}$$
Como $w'(T') = w'(T) + w'(xy) - w'(uv)$ e $w'(uv) \geq w'(xy)$, $w'(T') \leq w'(T)$, de onde, com o FATO 1, concluímos
$$w'(T^*) < w'(T). \qquad \text{FATO 2}$$

Se $xy \notin E(T^*)$, então note que T^* é árvore geradora em G, o que significaria que $w(T) \leq w(T^*)$. Ademais, nesse caso $w(T) = w'(T)$ e $w(T^*) = w'(T^*)$, o que contraria o FATO 1. Logo, $xy \in E(T^*)$. Pelo mesmo argumento,
"qualquer AGM de (G', w') contém xy". FATO 3

Note que $T^* - xy$ tem duas componentes conexas T_1^* e T_2^* que são árvores e que definem um corte no grafo, $(V(T_1^*), V(T_2^*))$, já que $V(T_2^*) = V(G') \setminus V(T_1^*)$.
Por simplicidade, chame $V_1 = V(T_1^*)$ e $V_2 = V(T_2^*)$.
Lembre que $\partial_{G'}(V_1) = \{ab \in E(G') : a \in V_1 \text{ e } b \in V_2\}$.
Claramente, $xy \in \partial_{G'}(V_1)$.



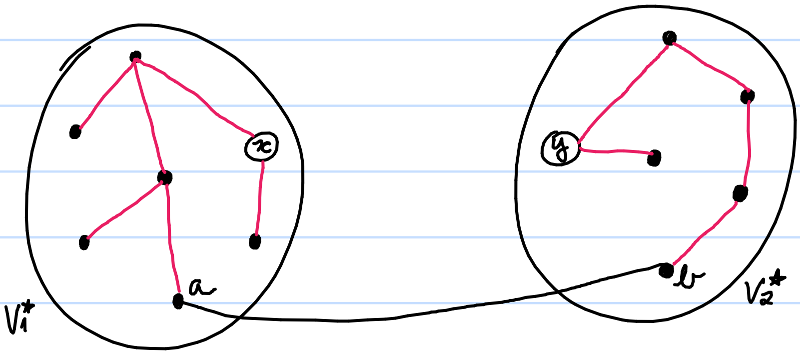




Agora note que

$$w'(xy) \leq w'(ab) \quad \forall\, ab \in \partial_{G'}(V_1),$$

pois caso não fosse verdade, existiria $ab \in \partial_{G'}(V_1)$ de peso menor que xy e tal que $T^* - xy + ab$ teria peso menor que T^*.

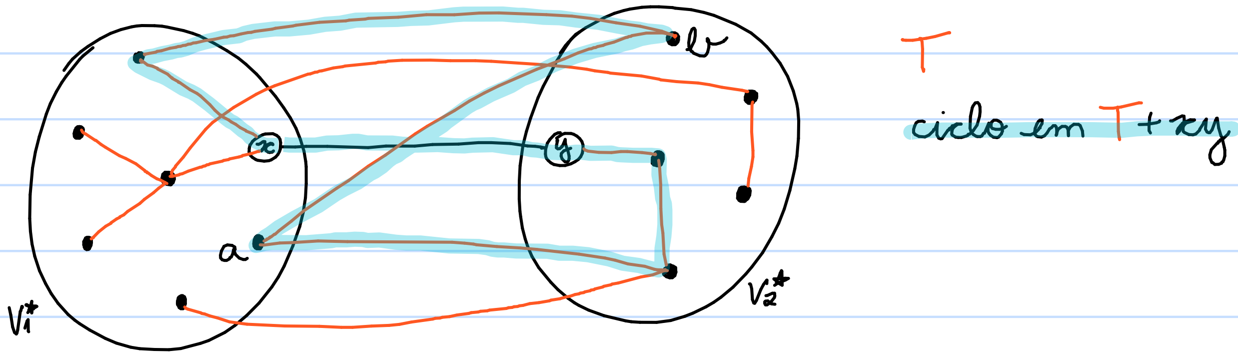


Mais ainda,

$$w'(xy) < w'(ab) \quad \forall\, ab \in \partial_{G'}(V_1), \qquad \text{FATO 4}$$

pois caso contrário teríamos uma A.G.M em (G', w') que não contém xy, contrariando o FATO 3.

Agora note que alguma aresta de T que está no ciclo existente em $T+xy$ precisa estar em $\partial_{G'}(V_1)$ (pois, pelo Lema 8.3, aula 10.pdf, uma aresta de um ciclo que cruza um corte não está sozinha no corte).
Seja ab uma tal aresta.



Então veja que

$$\underset{\hookrightarrow \text{pelo ciclo}}{w'(uv) \geqslant w'(ab)} \underset{\hookrightarrow \text{pelo FATO 4}}{> w'(xy)} \qquad \text{FATO 5}$$

Como T^* só tem xy no corte, $T^* - xy + ab$ é uma árvore geradora.
Mais do que isso, ela é geradora em G.
Então

$$w(T) \leqslant w(T^* - xy + ab) \qquad \text{FATO 6}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} w'(T^* - xy + ab) &= w'(T^*) - w'(xy) + w'(ab) \\ &\overset{\text{FATO 5}}{\leqslant} w'(T^*) - w'(xy) + w'(uv) \\ &\overset{\text{FATO 1}}{<} w'(T') - w'(xy) + w'(uv) \\ &\overset{\text{DEF.}}{=} w(T), \end{aligned}$$

e como $w'(T^* - xy + ab) = w(T^* - xy + ab)$, concluímos que $w(T) > w(T^* - xy + ab)$, contradição com FATO 6.
Logo, T' é mínima para (G', w').

CQD