Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Lista 1: Conceitos básicos em grafos

1. Prove o teorema do aperto de mãos fazendo indução no número de vértices.

2. Seja G um grafo conexo com pelo menos dois vértices e seja $u \in V(G)$ um vértice tal que $d(u) = 1$. Mostre que $G - u$ é conexo.

3. Seja G um grafo com $|V(G)| \geq 4$. Prove que se $|E(G)| \geq |V(G)|+1$, então G possui um vértice com grau pelo menos 3.

4. Mostre que todo grafo conexo com pelo menos dois vértices e que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau 1.

5. Mostre que $\delta(G) \leq \dfrac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$.

6. O complemento $\overline{G}$ de um grafo G é o grafo cujo conjunto de vértices é igual a $V(G)$ e cujas arestas são os pares de vértices não adjacentes de G. Prove que G ou $\overline{G}$ é conexo.

7. Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum.

8. Prove que todo passeio fechado de comprimento ímpar contém um ciclo ímpar.

9. A cintura de um grafo G, denotada por $g(G)$, é o menor comprimento de um ciclo em G. Caso G não possua um ciclo, então definimos $g(G) = \infty$. Seja G um grafo com $g(G) \geq 5$. Mostre que G tem pelo menos $\delta(G)^2 + 1$ vértices.

10. Prove ou dê um contraexemplo: se $uv \in E(G)$ é aresta de corte então u e v são vértices de corte.

11. Prove ou mostre um contraexemplo: se todo vértice de um grafo conexo G tem grau 2, então G é um ciclo.

12. Há um certo número de homens e 15 mulheres em um salão. Cada homem cumprimentou exatamente 6 mulheres e cada mulher cumprimentou exatamente 8 homens. Há quantos homens no salão?

13. Prove que todo caminho é bipartido.

14. Seja G um grafo (X, Y)-bipartido e sejam $u, v \in V(G)$. Prove que um uv-caminho tem comprimento par se e somente se u e v estão na mesma parte da bipartição (isto é, $u, v \in X$ ou $u, v \in Y$).

15. Prove que toda árvore é bipartida.

16. Seja G um grafo e f uma aresta de G. Prove que se f não pertence a um ciclo, então f é de corte.

17. Se G é um grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas, então G não tem ciclos.

18. Se G é um grafo conexo com n vértices e G não tem ciclos, então G tem $n-1$ arestas.

19. Prove que se G é uma árvore, então existe um único caminho entre qualquer par de vértices de G.

20. Prove que toda árvore com grau máximo $\Delta(G) \geq 2$ tem pelo menos $\Delta(G)$ folhas. Mostre que isso é o melhor possível construindo uma árvore de ordem n com exatamente $\Delta(G)$ folhas, para cada escolha de n e $\Delta(G)$, com $n > \Delta(G) \geq 2$.

21. Prove que toda árvore com ao menos dois vértices possui ao menos duas folhas.

22. Se T é uma árvore, prove que um vértice $v \in V(T)$ é de corte se e somente se ele não é uma folha.

23. Seja G um grafo conexo. Prove que G é uma árvore se e somente se $|E(G)| = |V(G)| - 1$.