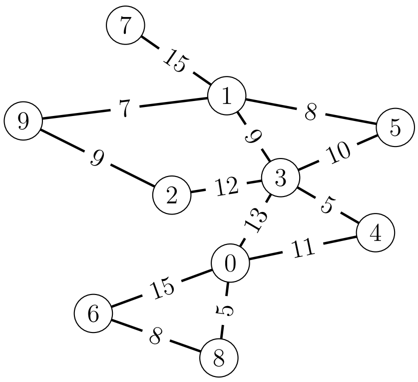
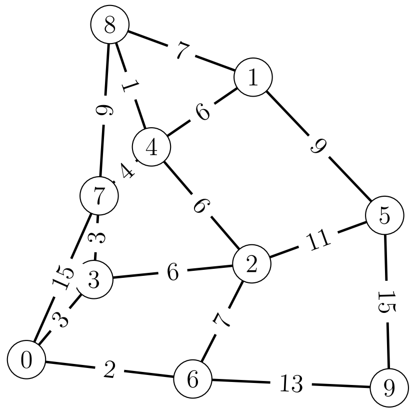
MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

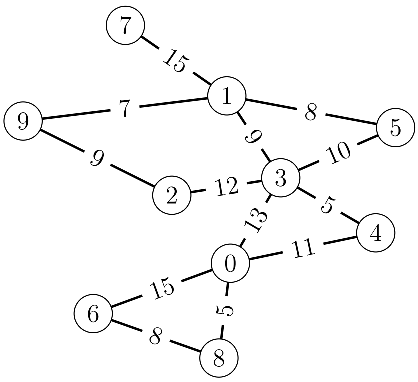
Lista 3: Árvores geradoras mínimas

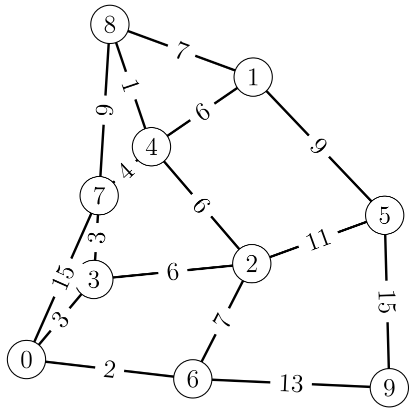
1. Execute o algoritmo de Prim em cada um dos grafos exibidos abaixo. Para cada iteração do algoritmo, você deve exibir o conteúdo dos vetores *visitado*, *pred*, *prioridade*, e a configuração da fila de prioridades.





2. Execute o algoritmo de Kruskal em cada um dos grafos exibidos abaixo. Para cada iteração do algoritmo, você deve exibir o conteúdo dos vetores H e *represent*.





3. Seja G um grafo, $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$ e seja T uma árvore geradora mínima de G sobre ω. Seja c uma constante positiva e seja $\psi\colon E(G) \to \mathbb{R}$ a função definida como $\psi(e) = \omega(e) + c$ para toda $e \in E(G)$. Prove que T também é uma árvore geradora mínima de G sobre ψ.

4. Seja G um grafo e seja $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Prove que se todos os pesos das arestas de G são distintos, então G possui apenas uma árvore geradora mínima.

5. Considere a seguinte afirmação:

   Seja G um grafo e seja $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Se G tem uma única árvore geradora mínima, então todas as arestas de G possuem custos distintos.

   Prove ou dê um contraexemplo para a afirmação acima.

6. Sejam T e T' árvores geradoras de G. Para cada aresta $e \in T \backslash T'$, prove que existe uma aresta $f \in T' \backslash T$ tal que $T' - f + e$ e $T - e + f$ são geradoras.

7. Seja G um grafo, $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$ e seja e T uma árvore geradora mínima de G sobre ω. Sejam $x, y \in V(G)$ com $xy \notin E(G)$ e seja $G' = G + xy$. Considere $\omega'\colon E(G') \to \mathbb{R}$ de forma que $\omega'(e) = \omega(e)$ para toda $e \in G$ e $\omega'(xy)$ foi bem definido. Seja uv uma aresta de maior peso no ciclo existente em $T + xy$. Prove que $T + xy - uv$ é uma árvore geradora mínima de G'.

8. Seja G um grafo e seja $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Suponha que todas as arestas de G possuam custos distintos e seja $C \subseteq G$ um ciclo. Prove que a aresta com o maior custo em C não pertence a nenhuma árvore geradora mínima de G.

9. Seja G um grafo e seja $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Seja $e \in E(G)$ uma aresta de peso mínimo em G. Prove ou dê um contraexemplo: e pertence a alguma árvore geradora mínima de G.

10. Seja G um grafo e seja $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Seja $e \in E(G)$ uma aresta de peso máximo em G. Prove ou dê um contraexemplo: e pertence a nenhuma árvore geradora mínima de G.

11. Seja G um grafo e seja $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Seja T uma árvore geradora mínima de G. Descreva um algoritmo que, dados G, ω, T e e, em que e é uma aresta tal que $e \notin E(G)$, devolve uma árvore geradora mínima T' de $G + e$ em tempo $O(V)$.

12. Se G é um grafo conexo e tem exatamente um ciclo, qual o número de árvores geradoras de G? E se G é conexo e tem exatamente dois ciclos?