MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

**Lista 4:** Conceitos básicos em digrafos

1. Vimos o seguinte resultado para grafos:

   *Se $G$ é um grafo com $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um caminho de comprimento pelo menos $\delta(G)$ e um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G)+1$.*

   Se for possível, reescreva-o e prove-o adequadamente para digrafos. Se não for, apresente um contraexemplo.

2. Vimos o seguinte resultado para grafos:

   *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau 1.*

   Se for possível, reescreva-o e prove-o adequadamente para digrafos. Se não for, apresente um contraexemplo.

3. Prove ou exiba um contraexemplo: *todo digrafo com ao menos dois vértices possui ao menos dois vértices com o mesmo grau de entrada ou ao menos dois vértices com o mesmo grau de saída.*

4. Quantas orientações um grafo simples possui?

5. Vimos em sala que "Se $D$ é um um digrafo, então $D$ admite uma ordenação topológica se e somente se $D$ é acíclico".

   É possível extrair da prova desse teorema um algoritmo que devolve uma ordenação topológica para um dado digrafo de entrada. Apresente um pseudocódigo para esse algoritmo.

6. Prove que todo DAG tem um sorvedouro/ralo.

7. Qual a relação entre as componentes fortemente conexas de um digrafo $D$ e seu reverso $\overleftarrow{D}$?

8. Seja $D$ um digrafo qualquer e seja $x, y \in V(D)$ tal que $xy \notin E(D)$ e $yx \notin E(D)$. Qual a relação entre as componentes fortemente conexas de $D$ e $D + xy$?

9. Descreva um algoritmo que determine se um dado digrafo $D$ é um DAG. O seu algoritmo deve executar em tempo $O(V + E)$.

10. Prove que, se $D$ é um digrafo, então $\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = |E(D)|$, por indução no número de vértices.

11. O que acontece quando nosso algoritmo de ordenação topológica (executar a DFS e devolver os vértices em ordem decrescente de *posordem*) é executado em um grafo dirigido que possui um ciclo?

12. Prove que todo torneio possui um caminho gerador.

13. Seja $D$ um digrafo. Seja $C(D)$ o digrafo das componentes fortemente conexas de $D$, também chamado *digrafo condensação*, definido de forma que para cada componente fortemente conexa $C_i$ de $D$ há um vértice $v_i$ em $V(C(D))$ e existe um arco $v_iv_j \in E(C(D))$ se e somente se existir um arco $ab \in E(D)$ tal que $a \in V(C_i)$ e $b \in (C_j)$.
    (a) Desenhe $C(D_1)$ e $C(D_2)$ para os digrafos $D_1$ e $D_2$ das Figuras 1 e 2.
    (b) Prove que $C(D)$, para qualquer $D$, é um DAG.

14. Prove que um digrafo $D$ é um DAG se e somente se não são encontradas arestas de retorno em nenhuma chamada da DFS sobre $D$.

15. O algoritmo de Kosajaru continuaria funcionando se uma ou ambas as passadas usassem busca em largura? Justifique.

16. Execute o algoritmo de ordenação topológica para o digrafo $D_3$.

17. Execute o algoritmo de Kosajaru sobre o digrafo $D_1$.

18. Execute o algoritmo de Tarjan sobre o digrafo $D_1$.

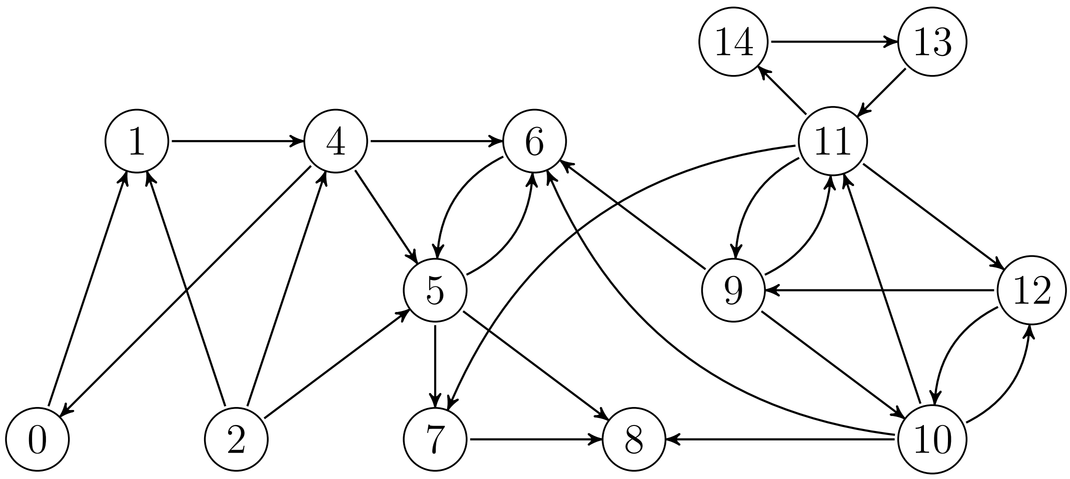


Figura 1: Digrafo $D_1$.

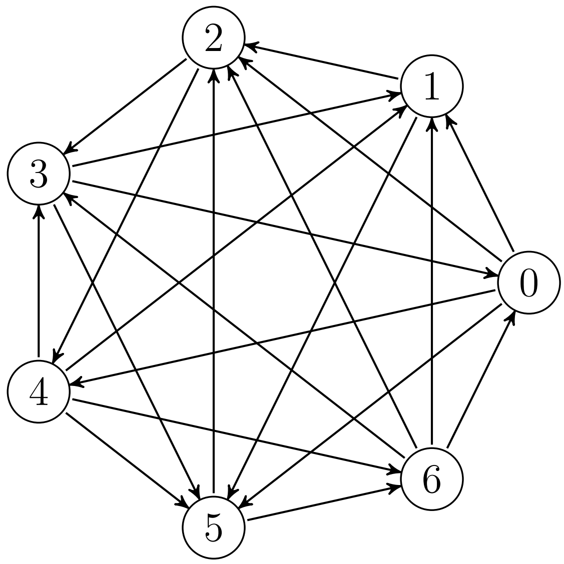


Figura 2: Digrafo $D_2$.

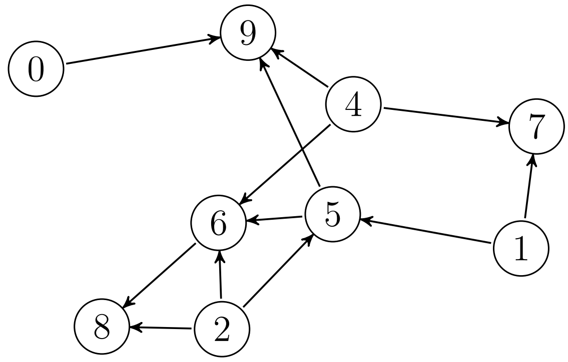


Figura 3: Digrafo $D_3$.