MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Lista 5: Caminhos mínimos

1. Seja D um digrafo e $w\colon E(D) \to \mathbb{R}$ tal que D não tem ciclo de custo negativo. Prove que se $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ é um v_0v_k-caminho mínimo, então $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ é um v_iv_j-caminho mínimo para qualquer $0 \leq i \leq j \leq k$.

2. Seja D um digrafo e $w\colon E(D) \to \mathbb{R}$ tal que D não tem ciclo de custo negativo. Dados $u, v \in V(D)$, prove que se P é um uv-passeio em D, então existe um uv-caminho Q tal que $w(Q) \leq w(P)$.

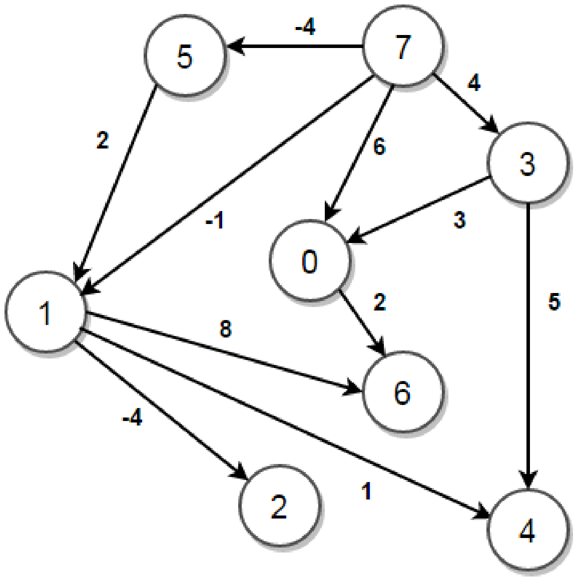
3. Seja D um digrafo e $w\colon E(D) \to \mathbb{R}$ tal que D não tem ciclo de custo negativo. Prove que se um vértice x está em um st-caminho mínimo, então tal caminho consiste de um sx-caminho mínimo seguido de um xt-caminho mínimo.

4. Seja D um digrafo e $w\colon E(D) \to \mathbb{R}$. Prove que se C é um ciclo de custo negativo em D, então C contém um arco que pode ser relaxado.

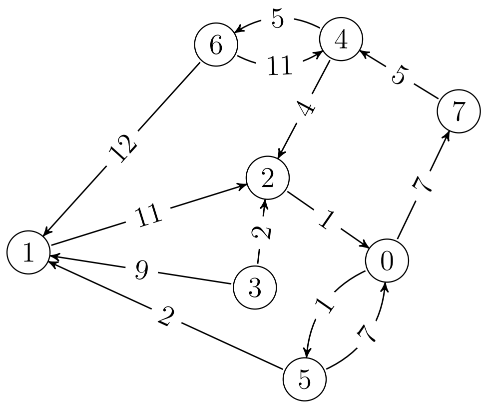
5. Seja D um digrafo e $w\colon E(D) \to \mathbb{R}$. Seja *dist* a matriz construída pelo algoritmo de Floyd-Warshall quando executado sobre D, w. Prove que existe $dist[i][i] < 0$ se e somente se D possui um ciclo com custo negativo.

6. Seja D um digrafo e $w\colon E(D) \to \mathbb{R}$. Seja $w_{\min} = \min\{w(e)\colon e \in E(D)\}$. Seja $w'\colon E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $w'(e) = w(e) + w_{\min}$. Prove ou dê um contraexemplo: para um vértice $s \in V(D)$ qualquer, o algoritmo de Dijkstra sobre D, w', s corretamente resolve o problema dos Caminhos Mínimos de Única Fonte.

7. Execute o algoritmo de DAGs para caminhos no digrafo exibido abaixo. Escolha o vértice 7 como raiz da busca. Em cada iteração do algoritmo, você deve exibir o conteúdo dos vetores *dist* e *pred*.



8. Execute o algoritmo de Dijkstra no digrafo exibido abaixo escolhendo o vértice 2 como raiz da busca. Em cada iteração do algoritmo, você deve exibir o vértice que é removido da fila de prioridade e a configuração dos vetores *dist* e *pred*.



9. Exiba um digrafo, sem ciclo de custo negativo, que demonstre que o algoritmo de Dijkstra não resolve o problema de caminhos mínimos de única fonte se o digrafo possuir arcos com custo negativo. Explique como seria a execução do Dijkstra neste exemplo.

10. Seja D um digrafo e seja $w\colon V(D) \cup E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dado um caminho P em D, definimos o custo de P, denotado por $w(P)$, como sendo $\sum_{x \in V(P) \cup E(P)} w(x)$. Prove que o problema de encontrar um st-caminho mínimo neste contexto pode ser resolvido com o problema de encontrar um st-caminho de custo mínimo em um digrafo que só contém custo nos arcos.

11. Seja D um digrafo e seja $\varphi\colon V(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dado um caminho P em D, definimos o custo de P, denotado por $\varphi(P)$, como sendo $\sum_{u \in V(P)} \varphi(u)$. Mostre que podemos resolver o problema de encontrar um st-caminho mínimo neste contexto aplicando o algoritmo de Dijkstra em um digrafo apropriado D' ponderado por uma função $w\colon E(D') \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

12. Sugira uma modificação para o algoritmo de Bellman-Ford que possivelmente lhe permita terminar a execução antes das $|V(D)| - 1$ iterações principais.