MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Lista 6: Outros problemas

1. Dado um grafo G, projete um algoritmo que decida se G é Euleriano. Projete um algoritmo que decida se G possui uma trilha Euleriana aberta.

2. Dado um DAG D, projete um algoritmo que decida se D possui um caminho Hamiltoniano.

3. Vimos em sala que "Um grafo conexo G é Euleriano se e somente se G é par." Qual seria o resultado equivalente para digrafos? Prove sua resposta.

4. Prove o seguinte teorema usando a mesma ideia da prova do teorema de Dirac: se G é um grafo conexo de ordem $n \geq 3$ e tal que $d(u) + d(v) \geq n$ para todo par u, v de vértices não-adjacentes, então G é Hamiltoniano.

5. Mostre que um grafo conexo G possui um caminho Hamiltoniano se $\delta(G) \geq (|V(G)| - 1)/2$.

6. Prove ou forneça um contraexemplo para a seguinte afirmação: *"Todo grafo Euleriano bipartido possui um número par de arestas"*.

7. Prove ou forneça um contraexemplo para a seguinte afirmação: *"Se G é um grafo Euleriano com um número par de vértices, então G possui um número par de arestas."*.

8. Prove que um grafo é par se e somente se ele pode ser decomposto em ciclos.

9. Prove que o algoritmo de Fleury encontra uma trilha Euleriana aberta quando o grafo contém dois vértices de grau ímpar e o algoritmo inicia em um deles.

10. Prove que se um grafo 3-regular possui um ciclo Hamiltoniano, então ele também possui um emparelhamento perfeito.

11. Prove que todo grafo k-regular bipartido, com $k \geq 1$, contém um emparelhamento perfeito.

12. Prove que todo grafo k-regular bipartido, com $k \geq 1$, pode ser decomposto em k emparelhamentos perfeitos em G.

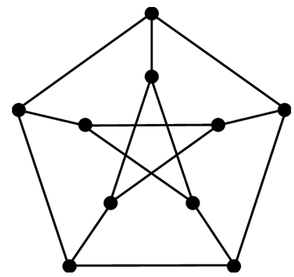
13. Exiba um grafo G com pelo menos 6 vértices e um emparelhamento em G que seja maximal mas não seja máximo. Justifique sua resposta.

14. Considere $\triangle$ como sendo a operação de diferença simétrica entre conjuntos: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Sejam M e M' dois emparelhamentos de um grafo G qualquer. Descreva como são os componentes de $G[M \triangle M']$. Particularmente, observe como eles são quando: (i) M e M' são ambos emparelhamentos máximos e (ii) M e M' são ambos emparelhamentos perfeitos.

15. Seja G um grafo, M um emparelhamento maximal em G e M^* um emparelhamento máximo em G. Mostre que $|M^*| \leq 2|M|$.

16. Vimos em sala o teorema "Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$." Da prova desse teorema pode ser extraído um algoritmo recursivo para colorir G. Descreva o pseudocódigo desse algoritmo.

17. Dê os valores de $\chi(G)$, $\chi'(G)$, $\alpha(G)$ e $\omega(G)$ para o grafo de Petersen, para o K_n e para o $K_{m,n}$.



Grafo de Petersen.

18. Mostre que se G é regular com $|V(G)|$ ímpar, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

19. Mostre que $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G por indução no número de arestas.

20. Mostre que, para todo grafo G, $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

21. Uma *subdivisão* de um grafo G é um grafo H que é gerado a partir de uma sequência de subdivisões das arestas de G. O Teorema de Kuratowski, de 1930, diz que "Um grafo é planar se e somente se ele não contém um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.".

    Use este resultado para provar que o grafo de Petersen não é planar.

22. Sabe-se que se G é um grafo planar, então $\delta(G) \leq 5$. Use isso para provar que se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 6$.