→ No exemplo anterior, encontramos f tal que

$$\langle M, w\rangle \in A_{TM} \quad \text{sse} \quad f(\langle M,w\rangle) = \langle M'\rangle \notin V_{TM}$$

o que significa que reduzimos de A_{TM} para $\overline{V_{TM}}$.

→ É tudo bem, pois isso mostra que V_{TM} é indecidível também.

→ De fato, não existe redução de A_{TM} para V_{TM}, veja prova abaixo.

Suponha que exista redução g de A_{TM} para V_{TM}, isto é

$$x \in A_{TM} \quad \text{sse} \quad g(x) \in V_{TM}.$$

Então também vale que $\overline{A_{TM}}$ reduz para $\overline{V_{TM}}$.

Acontece que $\overline{V_{TM}}$ é Turing-reconhecível (porquê?), mas $\overline{A_{TM}}$ não é, o que contradiz nosso primeiro teorema.

Usando redução para provar indecidibilidade

$REG_{MT} = \{ \langle M \rangle : M$ é MT e $L(M)$ é regular$\}$ é decidível ?

Para responder sim, basta construir um decisor, ou então mostrar que $\overline{REG_{TM}}$ é decidível, ou então mostrar que REG_{MT} e $\overline{REG_{MT}}$ são reconhecíveis, ou encontrar uma linguagem decidível e reduzir REG_{MT} para ela, ...

Para responder não, basta encontrar uma linguagem indecidível (A_{MT}, P_{MT}, V_{MT}) e reduzi-la para REG_{MT}.

Como usar REG_{MT} para resolver A_{MT} ?
Como criar f tal que $\langle M,w \rangle \in A_{MT}$ sse $f(\langle M,w \rangle) = \langle M' \rangle \in REG_{MT}$?

Dados M e w, quem deve ser M' para que
$L(M')$ é regular $\Rightarrow$ M aceita w
$L(M')$ não é regular $\Rightarrow$ M não aceita w ?

Seja F = "Sobre $\langle M,w \rangle$, onde M é MT e w é cadeia:
(1) Construa M' = "Sobre a entrada x:
(1) Se x é da forma $0^n 1^n$, aceite.
(2) Se não é, rode M sobre w e aceite se M aceitar."
(2) Devolva $\langle M' \rangle$."

F é redução de A_{MT} para REG_{MT}: seja $\langle M' \rangle = F(\langle M,w \rangle)$:
1) Se $\langle M,w \rangle \in A_{MT}$, então M aceita w. Pela construção, note que M' aceita tudo, portanto. Então $L(M') = \Sigma^*$, que é regular. Logo, $\langle M' \rangle \in REG_{MT}$.
2) Se $\langle M,w \rangle \notin A_{MT}$, então M não aceita w. Pela construção, M' só aceita cadeias da forma $0^n 1^n$ $\therefore$ $L(M') = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$, que não é regular. Logo, $\langle M' \rangle \notin REG_{MT}$.

Suponha que R é decisora para REG_{MT}. Construa S para A_{MT}:

S = "Sobre $\langle M, w \rangle$, onde M é MT e w é cadeia:

(1) Seja $\langle M' \rangle = F(\langle M, w \rangle)$.

(2) Rode R sobre $\langle M' \rangle$.

(3) Se R aceita, aceite. Se R rejeita, rejeite."

Mas então S é decisora para A_{MT} (porquê?)! Então R não existe.

Usando redução para provar indecidibilidade

$EQ_{MT} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle : M_1$ e M_2 são MT e $L(M_1) = L(M_2) \}$ é decidível?

Será que existe um programa que recebe dois programas e decide se eles fazem a mesma coisa?

Reduzir o quê para EQ_{MT}? ($A_{MT}, P_{MT}, V_{MT}, REG_{MT} \ldots$)

Como usar EQ_{MT} para resolver V_{MT}?
Como criar f tal que $\langle M \rangle \in V_{MT}$ sse $f(\langle M \rangle) = \langle M_1, M_2 \rangle \in EQ_{MT}$?

Dada M, quem devem ser M_1 e M_2 para que

$L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow L(M) = \emptyset$

$L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow L(M) \neq \emptyset$?

Seja F = "Sobre $\langle M \rangle$, onde M é MT:
(1) Construa M' = "Sobre a entrada x:
(1) Rejeite."
(2) Devolva $\langle M, M' \rangle$."

F é redução de V_{MT} para EQ_{MT}: seja $\langle M, M' \rangle = F(\langle M \rangle)$:
1) Se $\langle M \rangle \in V_{MT}$, então $L(M) = \emptyset$. Pela construção, $L(M') = \emptyset$. Então $\langle M, M' \rangle \in EQ_{MT}$.
2) Se $\langle M \rangle \notin V_{MT}$, então $L(M) \neq \emptyset$. Pela construção $L(M') = \emptyset$, então $\langle M, M' \rangle \notin EQ_{MT}$.

Suponha que R seja decisora para EQ_{MT}. Construa S para V_{MT}:
S = "Sobre $\langle M \rangle$, onde M é MT:
(1) Seja $\langle M_1, M_2 \rangle = F(\langle M \rangle)$.
(2) Rode R sobre $\langle M_1, M_2 \rangle$.
(3) Se R aceita, aceite. Se R rejeita, rejeite."

Mas então S é decisora para V_{MT} (por quê?)! Então R não existe.

Outros problemas indecidíveis

→ Uma GLC G gera Σ^* ?
→ Duas GLCs G_1 e G_2 geram a mesma linguagem?
→ Uma cadeia w é gerada por ambas G_1 e G_2?
→ Uma GLC é ambígua?

→ Teorema de Rice: testar qualquer propriedade das linguagens reconhecidas por MTs é indecidível

Usando redução para provar irreconhecibilidade

$EQ_{MT} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle : M_1$ e M_2 são MT e $L(M_1) = L(M_2) \}$ é indecidível.
Logo, EQ_{MT} ou $\overline{EQ_{MT}}$ são Turing-irreconhecíveis.
Vamos mostrar que isso vale para ambas.

"Se A reduz para B e A é Turing-irreconhecível, então B é Turing-irreconhecível."

Até agora, só temos $\overline{A_{MT}}$ sendo Turing-irreconhecível.

Como usar EQ_{MT} para reconhecer $\overline{A_{MT}}$?
Como criar f tal que $? \in \overline{A_{MT}}$ sse $f(\,?\,) = \langle M_1, M_2 \rangle \in EQ_{MT}$?

Dados M e w, quem devem ser M_1 e M_2 para que

$L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow M$ não aceita w
$L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow M$ aceita w

?

Vamos reduzir de A_{MT} para $\overline{EQ_{MT}}$.

Seja F = "Sobre $\langle M, w \rangle$, onde M é MT e w é cadeia:

(1) Construa M_1 = "Sobre a entrada x:

(1) Rejeite."

(2) Construa M_2 = "Sobre a entrada x:

(1) Rode M sobre w e aceite se ela aceitar."

(3) Devolva $\langle M_1, M_2 \rangle$."

F é redução de A_{MT} para $\overline{EQ_{MT}}$: seja $\langle M_1, M_2 \rangle = F(\langle M, w \rangle)$.

1) Se $\langle M, w \rangle \in A_{MT}$, M aceita w. Por construção, M_2 aceita tudo. Então $L(M_1) = \emptyset \neq L(M_2) = \Sigma^*$ e $\langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{EQ_{MT}}$

2) Se $\langle M, w \rangle \notin A_{MT}$, M não aceita w. Pela construção, M_2 rejeita tudo. Então $L(M_1) = L(M_2) = \emptyset$ e $\langle M_1, M_2 \rangle \notin \overline{EQ_{MT}}$.

Suponha que R é reconhecedora para EQ_{MT}. Construa S para A_{MT}:

S = "Sobre $\langle M, w \rangle$, onde M é MT e w é cadeia:

(1) Seja $\langle M_1, M_2 \rangle = F(\langle M, w \rangle)$.

(2) Rode R sobre $\langle M_1, M_2 \rangle$,

(3) Se R aceita, rejeite. Se R rejeita, aceite."

Como mostramos uma redução de A_{MT} para $\overline{EQ_{MT}}$, o que é também uma redução de $\overline{A_{MT}}$ para EQ_{MT}, mostramos que EQ_{MT} é Turing-irreconhecível.

Vamos reduzir de A_{MT} para EQ_{MT}.

Seja F = "Sobre $\langle M, w \rangle$, onde M é MT e w é cadeia:

(1) Construa M_1 = "Sobre a entrada x:

(1) Aceite."

(2) Construa M_2 = "Sobre a entrada x:

(1) Rode M sobre w e aceite se ela aceitar."

(3) Devolva $\langle M_1, M_2 \rangle$."

F é redução de A_{MT} para EQ_{MT}: seja $\langle M_1, M_2 \rangle = F(\langle M, w \rangle)$.

1) Se $\langle M, w \rangle \in A_{MT}$, M aceita w. Por construção, M_2 aceita tudo. Então $L(M_1) = \emptyset \neq L(M_2) = \Sigma^*$ e $\langle M_1, M_2 \rangle \notin EQ_{MT}$

2) Se $\langle M, w \rangle \notin A_{MT}$, M não aceita w. Pela construção, M_2 rejeita tudo. Então $L(M_1) = L(M_2) = \emptyset$ e $\langle M_1, M_2 \rangle \in EQ_{MT}$.

Suponha que R é reconhecedora para EQ_{MT}. Construa S para A_{MT}:

S = "Sobre $\langle M, w \rangle$, onde M é MT e w é cadeia:

(1) Seja $\langle M_1, M_2 \rangle = F(\langle M, w \rangle)$.

(2) Rode R sobre $\langle M_1, M_2 \rangle$,

(3) Se R aceita, aceite. Se R rejeita, rejeite."

Como mostramos uma redução de A_{MT} para EQ_{MT}, o que é também uma redução de $\overline{A_{MT}}$ para $\overline{EQ_{MT}}$, mostramos que $\overline{EQ_{MT}}$ é Turing-irreconhecível.