Disciplina CCM-104 – Teoria da Computação

Teoria da complexidade

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/∼carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

UFABC

Aviso legal

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre teoria da complexidade: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

Espaço / memória

Complexidade de espaço

Definição

Seja M uma MT determinística decisora. A *complexidade de espaço* de M é a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $f(n)$ é o maior número de células da fita que M lê sobre qualquer entrada de tamanho n. Também dizemos que M *executa em espaço* $f(n)$.

Complexidade de espaço

Definição

Seja M uma MT determinística decisora. A *complexidade de espaço* de M é a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $f(n)$ é o maior número de células da fita que M lê sobre qualquer entrada de tamanho n. Também dizemos que M *executa em espaço* $f(n)$.

Definição

Seja M uma MT não determinística decisora. A *complexidade de espaço* de M é a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $f(n)$ é o maior número de células da fita que M lê em qualquer ramo da sua computação sobre qualquer entrada de tamanho n. Também dizemos que M *executa em espaço* $f(n)$.

Definição

Para uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, definimos as seguintes classes de complexidade de espaço:

$$\begin{aligned}\text{SPACE}(f(n)) = \{L\colon L \text{ é uma linguagem decidível por uma MT determinística}\\ \text{de espaço } O(f(n))\}\end{aligned}$$

Classes de complexidade de espaço

Definição

Para uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, definimos as seguintes classes de complexidade de espaço:

$$\begin{aligned}\text{SPACE}(f(n)) = \{L\colon L \text{ é uma linguagem decidível por uma MT determinística}\\ \text{de espaço } O(f(n))\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{NSPACE}(f(n)) = \{L\colon L \text{ é uma linguagem decidível por uma MT não determinística}\\ \text{de espaço } O(f(n))\}\end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

SAT $\in$ *SPACE*(n)*, onde* n *é o tamanho da entrada.*

Demonstração: Considere a seguinte MT determinística.

M_{SAT} = "`Sobre a entrada` $\langle\phi\rangle$`, onde` ϕ `é uma fórmula Booleana:`

1. `Para cada atribuição de valores true/false às variáveis` $v_1, \ldots, v_m$ `de` ϕ`:`
   1.1 `Avalie` ϕ `com essa atribuição e aceite se der true.`
2. `Rejeite.`"

Exemplo

Teorema

SAT $\in$ *SPACE*(n), *onde* n *é o tamanho da entrada.*

Demonstração: Considere a seguinte MT determinística.

M_{SAT} = "`Sobre a entrada` $\langle\phi\rangle$`, onde` ϕ `é uma fórmula Booleana:`

1. `Para cada atribuição de valores true/false às variáveis` $v_1, \ldots, v_m$ `de` ϕ`:`
   1.1 `Avalie` ϕ `com essa atribuição e aceite se der true.`
2. `Rejeite.`"

A MT M_{SAT} claramente resolve SAT. Seja $n = |\langle\phi\rangle|$. Essa máquina executa em espaço linear em n porque a cada iteração do laço, reutiliza a mesma porção da fita: ela só precisa armazenar qual é a atribuição de valores das variáveis, que leva um espaço $O(m)$ extra além da entrada em si, que tem tamanho $O(n)$. Porém certamente $m \leq n$, então o total de espaço utilizado é $O(n)$. C.Q.D.

Teorema de Savitch

Teorema

Para qualquer função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$*, onde* $f(n) \geq \log n$*,*

$$\mathit{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathit{SPACE}(f^2(n))\,.$$

A ideia da demonstração é mostrar que qualquer MT não determinística que usa espaço $f(n)$ pode ser convertida em uma MT determinística que usa espaço $f^2(n)$.

As classes PSPACE e NPSPACE

Uma analogia à classe P.

Definição

PSPACE é a classe de linguagens que são decidíveis em espaço polinomial por uma MT determinística, isto é,

$$\text{PSPACE} = \bigcup_k \text{SPACE}(n^k)\,.$$

As classes PSPACE e NPSPACE

Uma analogia à classe P.

Definição

PSPACE é a classe de linguagens que são decidíveis em espaço polinomial por uma MT determinística, isto é,

$$\mathsf{PSPACE} = \bigcup_k \mathsf{SPACE}(n^k)\,.$$

Uma analogia à classe NP.

Definição

NPSPACE é a classe de linguagens que são decidíveis em espaço polinomial por uma MT não determinística, isto é,

$$\mathsf{NPSPACE} = \bigcup_k \mathsf{NSPACE}(n^k)\,.$$

As classes PSPACE e NPSPACE

PSPACE $=$ NPSPACE, por causa do Teorema de Savitch!

As classes PSPACE e NPSPACE

PSPACE $=$ NPSPACE, por causa do Teorema de Savitch!

P $\subseteq$ PSPACE, pois um MT que faz um número de passos polinomial acessa um espaço polinomial.

As classes PSPACE e NPSPACE

PSPACE = NPSPACE, por causa do Teorema de Savitch!

P $\subseteq$ PSPACE, pois um MT que faz um número de passos polinomial acessa um espaço polinomial.

NP $\subseteq$ NPSPACE pelo mesmo motivo e, portanto, NP $\subseteq$ PSPACE.

As classes PSPACE e NPSPACE

PSPACE $=$ NPSPACE, por causa do Teorema de Savitch!

P $\subseteq$ PSPACE, pois um MT que faz um número de passos polinomial acessa um espaço polinomial.

NP $\subseteq$ NPSPACE pelo mesmo motivo e, portanto, NP $\subseteq$ PSPACE.

PSPACE $\subseteq$ EXPTIME $= \bigcup_k \mathrm{TIME}(2^{n^k})$, pois uma MT que usa espaço $f(n)$ executa em tempo $f(n)2^{O(f(n))}$ (é o maior número de configurações que ela pode ter).

As classes PSPACE e NPSPACE

Resumindo,

$$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE} = \mathsf{NPSPACE} \subseteq \mathsf{EXPTIME}$$

e não sabemos se nenhum desses $\subseteq$ é na verdade $=$.

As classes PSPACE e NPSPACE

Resumindo,

$$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE} = \mathsf{NPSPACE} \subseteq \mathsf{EXPTIME}$$

e não sabemos se nenhum desses $\subseteq$ é na verdade $=$.

Na verdade, já foi demonstrado que

$$\mathsf{P} \neq \mathsf{EXPTIME}$$

o que significa que algum $\subseteq$ da equação anterior é na verdade um $\subset$.

Mas não sabemos qual...