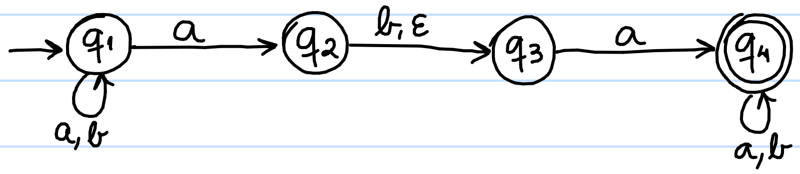
3) AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

Autômatos Finitos Não Determinísticos



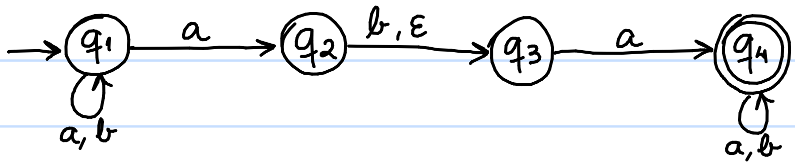
→ Não determinismo: a máquina pode estar com vários estados ativos ao mesmo tempo.

→ A todo momento, pode haver mais de uma possibilidade de transição a ser seguida: uma transição com rótulo x pode ser seguida a partir de um estado ativo quando x for lido na entrada; uma transição com rótulo ε pode ser seguida a partir de um estado ativo sem que nada seja lido.

→ Quando há mais de uma possibilidade, "cria-se uma cópia" da máquina para cada uma. Quando não há, a máquina desaparece.

→ Vamos processar aabba:

Fazer com slides



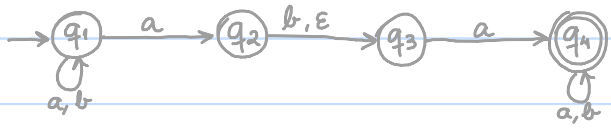
DEFINIÇÃO: Um autômato finito não determinístico (AFN) é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- Q é um conjunto finito de estados
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ é uma função de transição
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

Exemplo

→ $N = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_4\})$ em que δ é dada por

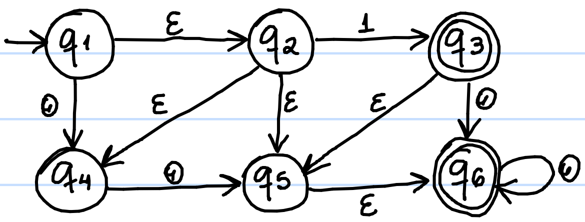
δ	a	b	ε
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$



é um AFN.

Outro exemplo

N_2



Vamos computar a cadeia 1001

estados ativos	cadeia lida
$\{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6\}$	1 0 0 1
$\{q_3, q_5, q_6\}$	0 0 1
$\{q_6\}$	0 1
$\{q_6\}$	1
$\emptyset$	

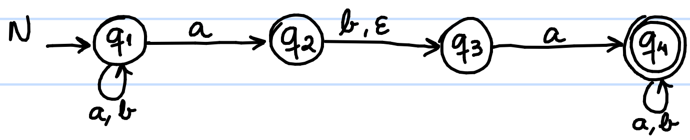
ε-fechamento

DEFINIÇÃO: Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN. Para $q \in Q$, o **ε-fechamento de q**, denotado $E(q)$, é o conjunto de estados tal que:

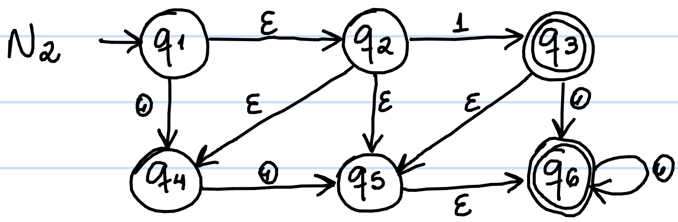
- $q \in E(q)$
- se $r \in E(q)$ e $s \in \delta(r, \varepsilon)$, então $s \in E(q)$.

→ Ou seja: $E(q)$ é o conjunto de estados alcançáveis a partir de q seguindo 0 ou mais transições com rótulo ε.
$E(q)$ é o conjunto de estados que ficam ativos no instante que q fica ativo.

Exemplos



$E(q_1) = \{q_1\}$
$E(q_2) = \{q_2, q_3\}$
$E(q_3) = \{q_3\}$
$E(q_4) = \{q_4\}$



$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6\}$
$E(q_2) = \{q_2, q_4, q_5, q_6\}$
$E(q_3) = \{q_3, q_5, q_6\}$
$E(q_4) = \{q_4\}$
$E(q_5) = \{q_5, q_6\}$
$E(q_6) = \{q_6\}$

"Abusos" de notação

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN, $S \subseteq Q$ e $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$:

→ Usaremos $\delta(S, x) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, x)$
para denotar quais estados ficam ativos ao seguir transições rotuladas com x a partir dos estados em S.

→ Usaremos $E(S) = \bigcup_{q \in S} E(q)$
para denotar quais estados ficam ativos no mesmo instante em que os estados em S ficam ativos.

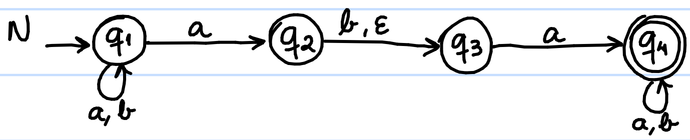
Função de transição estendida

DEFINIÇÃO: Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN. A função de transição estendida de N é a função $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ definida da seguinte forma: para $q \in Q$ e $w \in \Sigma^*$,

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} E(q) & \text{se } w = \varepsilon \\ E(\delta(\hat{\delta}(q, \alpha), x)) & \text{se } w = \alpha x, \text{ com } x \in \Sigma \text{ e } \alpha \in \Sigma^* \end{cases}$$

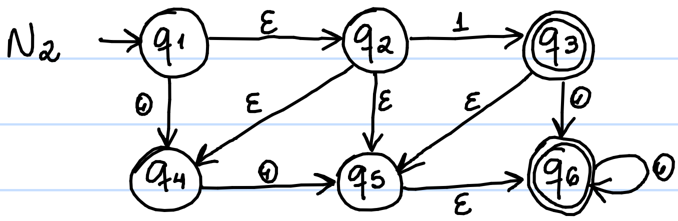
→ Ou seja, $\hat{\delta}(q, w)$ é o conjunto de estados ativos em N após computar toda uma cadeia w a partir do estado q.

Exemplos



- $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = E(q_1) = \{q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_1, a) = E(\delta(\hat{\delta}(q_1, \varepsilon), a)) = E(\delta(\{q_1\}, a)) = E(\{q_1, q_2\})$
  $= E(q_1) \cup E(q_2) = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\hat{\delta}(q_1, ab) = E(\delta(\hat{\delta}(q_1, a), b)) = E(\delta(\{q_1, q_2, q_3\}, b)) = E(\{q_1, q_3\})$
  $= \{q_1, q_3\}$

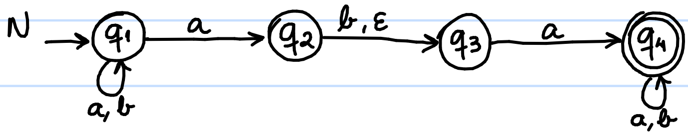
Exemplos



- $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6\}$
- $\hat{\delta}(q_1, 1) = E(\delta(\hat{\delta}(q_1,\varepsilon), 1)) = E(\delta(\{q_1,q_2,q_4,q_5,q_6\}, 1)) =$
  $= E(\{q_3, q_5, q_6\}) = \{q_3, q_5, q_6\}.$

Computação em AFN

DEFINIÇÃO: Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN e seja $w \in \Sigma^*$.
Dizemos que N aceita w se $\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$.
Caso contrário, N rejeita w.



É possível computar abab só no q_1

Computação em AFN – Definição alternativa

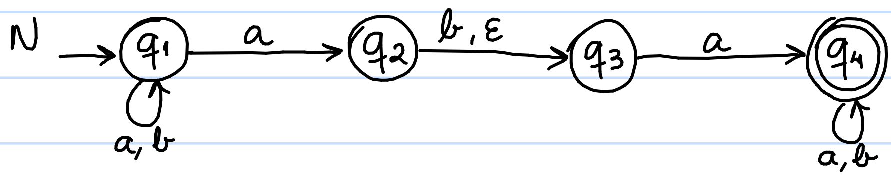
DEFINIÇÃO: Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN e seja $w = w_1 w_2 \dots w_n$ uma cadeia sobre Σ ($w \in \Sigma^*$).
Dizemos que N aceita w se podemos escrever $w = x_1 x_2 \dots x_m$, com cada $x_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e existe uma sequência de estados $(r_0, r_1, \dots, r_m)$ tal que

- $r_0 = q_0$
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, x_{i+1}) \quad \forall\, i = 0, \dots, m-1$
- $r_m \in F$

A linguagem de um AFN

DEFINIÇÃO: Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN. Dizemos que
$$X = \{ w \in \Sigma^* : N \text{ aceita } w \}$$
é a linguagem reconhecida por N, ou simplesmente a linguagem de N.
Também dizemos que N reconhece X.
Denotamos tal linguagem por $L(N)$.

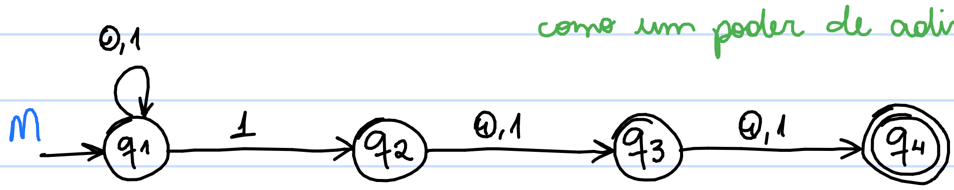
Exemplo



$$L(N) = \{ w \in \{a,b\}^* : w \text{ contém } aa \text{ ou } aba \text{ como subcadeia} \}$$

Mais exemplos

"O não determinismo às vezes é visto/explicado como um poder de adivinhação."



$$L(M) = \{ w \in \{0,1\}^* : \text{o 3º símbolo apartir do fim é } 1 \}$$

$q_1 \in \hat{\delta}(q_1, w) \iff w \in \Sigma^*$

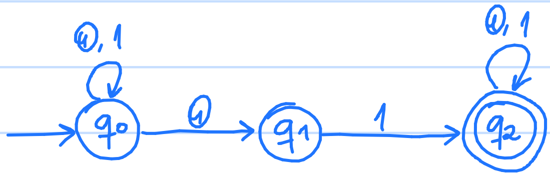
$q_2 \in \hat{\delta}(q_1, w) \iff w = \alpha 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$

$q_3 \in \hat{\delta}(q_1, w) \iff w = \alpha 1 x$, $\alpha \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$

$q_4 \in \hat{\delta}(q_1, w) \iff w = \alpha 1 x y$, $\alpha \in \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma$

Mais exemplos

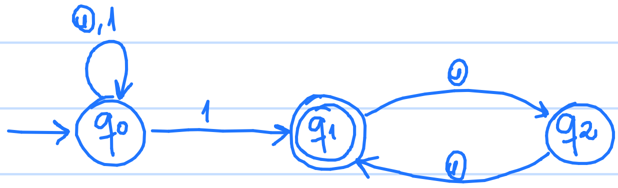
Faça um AFN que reconheça $\{ w \in \{0,1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } w \}$



$$q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w \in \Sigma^*$$
$$q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha 0 \text{ e } \alpha \in \Sigma^*$$
$$q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha 0 1 \beta \text{ e } \alpha, \beta \in \Sigma^*$$

Mais exemplos

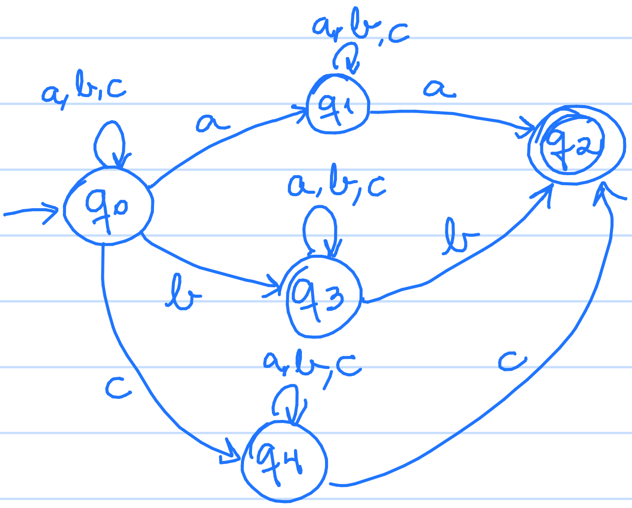
Faça um AFN que reconheça
$\{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 \geq 1$ e existe um nº par de 0s após o último 1 $\}$



$$q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w \in \Sigma^*$$
$$q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha 1 0^K, \ \alpha \in \Sigma^* \text{ e } K \text{ par}$$
$$q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha 1 0^K, \ \alpha \in \Sigma^* \text{ e } K \text{ ímpar}$$

Mais exemplos

Faça um AFN que reconheça $\{ w \in \{a,b,c\}^* :$ o último símbolo de w tem ao menos mais uma ocorrência $\}$



$$q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w \in \Sigma^*$$
$$q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha a \beta$$
$$q_3 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha b \beta$$
$$q_4 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha c \beta$$
$$q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w) \iff w = \alpha a \beta a \text{ ou } w = \alpha b \beta b \text{ ou } w = \alpha c \beta c$$