Disciplina CCM-104 – Teoria da Computação

AFD $\times$ AFN

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/~carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

Aviso legal

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre AFDs e AFNs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

AFD $\times$ AFN

Teorema

Todo AFN tem um AFD equivalente

AFD $\times$ AFN

Teorema

Todo AFN tem um AFD equivalente

Ideia da prova: Dado um AFN N, criar um AFD M tal que N aceita ω se e somente se M aceita ω.

Como?

Teorema

Todo AFN tem um AFD equivalente

Ideia da prova: Dado um AFN N, criar um AFD M tal que N aceita ω se e somente se M aceita ω.

Como?

Vamos fazer o AFD simular o AFN: ele precisará **lembrar** quais estados do AFN estão ativos.

Demonstração do Teorema

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN qualquer. Vamos criar um AFD $M = (B, \Sigma, \phi, p_0, T)$ em que:

- $B = \mathcal{P}(Q)$
- Para $R \in B$ e $x \in \Sigma$, $\phi(R, x) = E(\delta(R, x))$
- $p_0 = E(q_0)$
- $T = \{R \in B \colon R \cap F \neq \emptyset\}$

Demonstração do Teorema

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN qualquer. Vamos criar um AFD $M = (B, \Sigma, \phi, p_0, T)$ em que:

- $B = \mathcal{P}(Q)$
- Para $R \in B$ e $x \in \Sigma$, $\phi(R, x) = E(\delta(R, x))$
- $p_0 = E(q_0)$
- $T = \{R \in B \colon R \cap F \neq \emptyset\}$

Resta mostrar que $L(N) = L(M)$.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja $\omega \in \Sigma^*$ qualquer.

Note que $\omega \in L(N) \iff \hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$.

E $\omega \in L(M) \iff \hat{\phi}(p_0, \omega) \in T$.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja $\omega \in \Sigma^*$ qualquer.

Note que $\omega \in L(N) \iff \hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$.

E $\omega \in L(M) \iff \hat{\phi}(p_0, \omega) \in T$.

Vamos então mostrar que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\phi}(p_0, \omega)$, por indução em $|\omega|$.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja $\omega \in \Sigma^*$ qualquer.

Note que $\omega \in L(N) \iff \hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$.

E $\omega \in L(M) \iff \hat{\phi}(p_0, \omega) \in T$.

Vamos então mostrar que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\phi}(p_0, \omega)$, por indução em $|\omega|$.

Caso base: $|\omega| = 0$. Então $\omega = \varepsilon$.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja $\omega \in \Sigma^*$ qualquer.

Note que $\omega \in L(N) \iff \hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$.

E $\omega \in L(M) \iff \hat{\phi}(p_0, \omega) \in T$.

Vamos então mostrar que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\phi}(p_0, \omega)$, por indução em $|\omega|$.

Caso base: $|\omega| = 0$. Então $\omega = \varepsilon$. Por definição, $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = E(q_0)$ e $\hat{\phi}(p_0, \varepsilon) = p_0 = E(q_0)$.

Logo, o resultado vale nesse caso.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja então $n = |\omega| > 0$ e suponha que $\hat{\delta}(q_0, \alpha) = \hat{\phi}(p_0, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \Sigma^*$ com $|\alpha| < n$.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja então $n = |\omega| > 0$ e suponha que $\hat{\delta}(q_0, \alpha) = \hat{\phi}(p_0, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \Sigma^*$ com $|\alpha| < n$.
Como $|\omega| > 0$, então $\omega = \gamma x$, para $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$, com $|\gamma| = n - 1$.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja então $n = |\omega| > 0$ e suponha que $\hat{\delta}(q_0, \alpha) = \hat{\phi}(p_0, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \Sigma^*$ com $|\alpha| < n$.
Como $|\omega| > 0$, então $\omega = \gamma x$, para $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$, com $|\gamma| = n - 1$.

Então, por HI vale que $\hat{\delta}(q_0, \gamma) = \hat{\phi}(p_0, \gamma) = S$.

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja então $n = |\omega| > 0$ e suponha que $\hat{\delta}(q_0, \alpha) = \hat{\phi}(p_0, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \Sigma^*$ com $|\alpha| < n$.
Como $|\omega| > 0$, então $\omega = \gamma x$, para $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$, com $|\gamma| = n - 1$.

Então, por HI vale que $\hat{\delta}(q_0, \gamma) = \hat{\phi}(p_0, \gamma) = S$.

Pela definição de $\hat{\delta}$,

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = E(\delta(\hat{\delta}(q_0, \gamma), x)) = E(\delta(S, x))\,.$$

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja então $n = |\omega| > 0$ e suponha que $\hat{\delta}(q_0, \alpha) = \hat{\phi}(p_0, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \Sigma^*$ com $|\alpha| < n$.
Como $|\omega| > 0$, então $\omega = \gamma x$, para $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$, com $|\gamma| = n - 1$.

Então, por HI vale que $\hat{\delta}(q_0, \gamma) = \hat{\phi}(p_0, \gamma) = S$.

Pela definição de $\hat{\delta}$,

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = E(\delta(\hat{\delta}(q_0, \gamma), x)) = E(\delta(S, x)) .$$

Pela construção de ϕ,

$$\phi(S, x) = E(\delta(S, x)) .$$

Demonstração do Teorema (cont.)

Seja então $n = |\omega| > 0$ e suponha que $\hat{\delta}(q_0, \alpha) = \hat{\phi}(p_0, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \Sigma^*$ com $|\alpha| < n$.
Como $|\omega| > 0$, então $\omega = \gamma x$, para $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$, com $|\gamma| = n - 1$.

Então, por HI vale que $\hat{\delta}(q_0, \gamma) = \hat{\phi}(p_0, \gamma) = S$.

Pela definição de $\hat{\delta}$,

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = E(\delta(\hat{\delta}(q_0, \gamma), x)) = E(\delta(S, x))\,.$$

Pela construção de ϕ,

$$\phi(S, x) = E(\delta(S, x))\,.$$

Pela definição de $\hat{\phi}$,

$$\hat{\phi}(p_0, \omega) = \phi(\hat{\phi}(p_0, \gamma), x) = \phi(S, x)\,.$$

Demonstração do Teorema (cont.)

Juntando tudo e usando a HI,

$$\hat{\phi}(p_0, \omega) = \phi(\hat{\phi}(p_0, \phi), x) = \phi(S, x) = E(\delta(S, x)) = \hat{\delta}(q_0, \omega)\,.$$

C.Q.D.