Disciplina CCM-104 – Teoria da Computação

AFD $\times$ AFN

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/~carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

UFABC

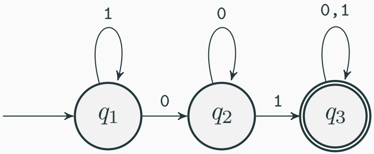
Aviso legal

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre AFDs e AFNs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Demonstrando a linguagem de um AFD

Considere o seguinte AFD M_1:



Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido acima e $\omega \in \{0, 1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

(1) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$, então $\omega = 1^i$ para $i \geq 0$" é verdadeira.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

(1) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$, então $\omega = 1^i$ para $i \geq 0$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$" é verdadeira.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

(1) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$, então $\omega = 1^i$ para $i \geq 0$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$" é verdadeira.

(2) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$, então $\omega = 1^i0^k$ para $i \geq 0, k \geq 1$" é verdadeira.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

(1) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$, então $\omega = 1^i$ para $i \geq 0$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$" é verdadeira.

(2) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$, então $\omega = 1^i0^k$ para $i \geq 0, k \geq 1$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i0^k$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$" é verdadeira.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

(1) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$, então $\omega = 1^i$ para $i \geq 0$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$" é verdadeira.

(2) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$, então $\omega = 1^i0^k$ para $i \geq 0, k \geq 1$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i0^k$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$" é verdadeira.

(3) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$, então $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para $i \geq 0, k \geq 1, \alpha \in \Sigma^*$" é verdadeira.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

(1) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$, então $\omega = 1^i$ para $i \geq 0$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$" é verdadeira.

(2) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$, então $\omega = 1^i0^k$ para $i \geq 0, k \geq 1$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i0^k$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$" é verdadeira.

(3) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$, então $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para $i \geq 0, k \geq 1, \alpha \in \Sigma^*$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i0^k1\alpha$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$" é verdadeira.

Demonstração do Lema 1

Vamos provar o resultado do lema por indução em $|\omega|$.

Caso base: $\omega = 0$. Neste caso, $\omega = \varepsilon$ e sabemos que $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

(1) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$, então $\omega = 1^i$ para $i \geq 0$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$" é verdadeira.

(2) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$, então $\omega = 1^i0^k$ para $i \geq 0, k \geq 1$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i0^k$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_2$" é verdadeira.

(3) "se $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$, então $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para $i \geq 0, k \geq 1, \alpha \in \Sigma^*$" é verdadeira.
"se $\omega = 1^i0^k1\alpha$, então $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_3$" é verdadeira.

Portanto, o resultado segue no caso base.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que $|\omega| = n > 0$ e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que n.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que $|\omega| = n > 0$ e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que n.

Como $n > 0$, podemos escrever $\omega = \gamma x$, com $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que $|\omega| = n > 0$ e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que n.

Como $n > 0$, podemos escrever $\omega = \gamma x$, com $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$.

Então $|\gamma| < n$, o que, por HI, significa que (1)–(3) valem para γ.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

Suponha então que $|\omega| = n > 0$ e que (1)–(3) valem para cadeias de comprimento menor do que n.

Como $n > 0$, podemos escrever $\omega = \gamma x$, com $x \in \Sigma$ e $\gamma \in \Sigma^*$.

Então $|\gamma| < n$, o que, por HI, significa que (1)–(3) valem para γ.

Resta provar que (1)–(3) valem para ω.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$"

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$.

Por definição, $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$.

Por definição, $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$.

Logo, $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ e $x = 1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$.

Por definição, $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$.

Logo, $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ e $x = 1$.

Como valem (1)–(3) para γ, então por (1) temos $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$.

Por definição, $q_1 = \delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), x)$.

Logo, $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$ e $x = 1$.

Como valem (1)–(3) para γ, então por (1) temos $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

Mas então vale que $\omega = 1^{i+1} = 1^j$ para algum $j \geq 0$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$"

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$"

Suponha que $\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$"

Suponha que $\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

Como $n > 0$, temos $x = 1$ e $\gamma = 1^{i-1}$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$"

Suponha que $\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

Como $n > 0$, temos $x = 1$ e $\gamma = 1^{i-1}$.

Por HI, então, como (1) vale para γ, temos que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(1 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$"

Suponha que $\omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

Como $n > 0$, temos $x = 1$ e $\gamma = 1^{i-1}$.

Por HI, então, como (1) vale para γ, temos que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$.

Logo, $\delta(\hat{\delta}(q_1, \delta), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1$, de onde concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Rightarrow$) “$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$” $\Rightarrow$ “$\omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$”

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$" $\Rightarrow$ "$\omega = \mathsf{1}^i\mathsf{0}^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$.

Então, observando o AFD, deve ser o caso de $x = 0$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 ⇒) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$.

Então, observando o AFD, deve ser o caso de $x = 0$.

Como $\delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), 0) = q_2$, temos duas possibilidades:

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 ⇒) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$.

Então, observando o AFD, deve ser o caso de $x = 0$.

Como $\delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), 0) = q_2$, temos duas possibilidades:

- $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$, o que nos diz, por HI (1), que $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$ e, portanto, concluímos que $\omega = 1^i0$ para algum $i \geq 0$;

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$.

Então, observando o AFD, deve ser o caso de $x = 0$.

Como $\delta(\hat{\delta}(q_1, \gamma), 0) = q_2$, temos duas possibilidades:

- $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$, o que nos diz, por HI (1), que $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$ e, portanto, concluímos que $\omega = 1^i0$ para algum $i \geq 0$;
- $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$, o que nos diz, por HI (2), que $\gamma = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$ e, portanto, concluímos que $\omega = 1^i0^j$ para algum $i \geq 0$ e $j \geq 1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Leftarrow$) "$\omega = \mathsf{1}^i\mathsf{0}^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$"

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$"

Suponha que $\omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

Então $x = 0$ e temos duas possibilidades:

- $k = 1$, o que faz $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

Então $x = 0$ e temos duas possibilidades:

- $k = 1$, o que faz $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$. Por HI (1), temos que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$. Como $\delta(q_1, 0) = q_2$, concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$;

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$"

Suponha que $\omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

Então $x = 0$ e temos duas possibilidades:

- $k = 1$, o que faz $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$. Por HI (1), temos que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$. Como $\delta(q_1, 0) = q_2$, concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$;
- $k > 1$, o que faz $\gamma = 1^i 0^j$ para algum $i \geq 0$ e $j \geq 1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(2 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

Então $x = 0$ e temos duas possibilidades:

- $k = 1$, o que faz $\gamma = 1^i$ para algum $i \geq 0$. Por HI (1), temos que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_1$. Como $\delta(q_1, 0) = q_2$, concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$;
- $k > 1$, o que faz $\gamma = 1^i0^j$ para algum $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Por HI (2), temos que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$. Como $\delta(q_2, 0) = q_2$, concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$"

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) “$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$” $\Rightarrow$ “$\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$”

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

- Se $x = 0$, então pelo AFD podemos ver que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

- Se $x = 0$, então pelo AFD podemos ver que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Então por HI (3) temos $\gamma = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

- Se $x = 0$, então pelo AFD podemos ver que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Então por HI (3) temos $\gamma = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$. Mas então $\omega = 1^i0^k1\beta$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\beta \in \Sigma^*$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 ⇒) “$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$” $\Rightarrow$ “$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$”

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

- Se $x = 0$, então pelo AFD podemos ver que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Então por HI (3) temos $\gamma = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$. Mas então $\omega = 1^i0^k1\beta$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\beta \in \Sigma^*$.
- Se $x = 1$, então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$, então por HI (2) temos $\gamma = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

- Se $x = 0$, então pelo AFD podemos ver que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Então por HI (3) temos $\gamma = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$. Mas então $\omega = 1^i 0^k 1\beta$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\beta \in \Sigma^*$.
- Se $x = 1$, então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$, então por HI (2) temos $\gamma = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$. Mas então concluímos que $\omega = 1^i 0^k 1$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$;

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

- Se $x = 0$, então pelo AFD podemos ver que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Então por HI (3) temos $\gamma = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$. Mas então $\omega = 1^i0^k1\beta$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\beta \in \Sigma^*$.
- Se $x = 1$, então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$, então por HI (2) temos $\gamma = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$. Mas então concluímos que $\omega = 1^i0^k1$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$;
  - se $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$, então por HI (3) temos $\gamma = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Rightarrow$) "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$" $\Rightarrow$ "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$"

Suponha que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Vamos dividir os casos de acordo com o valor de x.

- Se $x = 0$, então pelo AFD podemos ver que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Então por HI (3) temos $\gamma = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$. Mas então $\omega = 1^i0^k1\beta$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\beta \in \Sigma^*$.
- Se $x = 1$, então temos duas possibilidades, pelo AFD:
  - se $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$, então por HI (2) temos $\gamma = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$. Mas então concluímos que $\omega = 1^i0^k1$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$;
  - se $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$, então por HI (3) temos $\gamma = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$. Mas então concluímos que $\omega = 1^i0^k1\beta$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\beta \in \Sigma^*$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Suponha que $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) “$\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$” $\Rightarrow$ “$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$”

Suponha que $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de α:

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Suponha que $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de α:

- Se $\alpha \neq \varepsilon$, então $\gamma = 1^i 0^k 1\beta$, com $\alpha = \beta x$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de α:

- Se $\alpha \neq \varepsilon$, então $\gamma = 1^i0^k1\beta$, com $\alpha = \beta x$. Então por HI (3), vale que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de α:

- Se $\alpha \neq \varepsilon$, então $\gamma = 1^i0^k1\beta$, com $\alpha = \beta x$. Então por HI (3), vale que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Como $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$ independente do valor de x, então concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de α:

- Se $\alpha \neq \varepsilon$, então $\gamma = 1^i0^k1\beta$, com $\alpha = \beta x$. Então por HI (3), vale que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Como $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$ independente do valor de x, então concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$.
- Se $\alpha = \varepsilon$, então $x = 1$ e $\gamma = 1^i0^k$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de α:

- Se $\alpha \neq \varepsilon$, então $\gamma = 1^i0^k1\beta$, com $\alpha = \beta x$. Então por HI (3), vale que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Como $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$ independente do valor de x, então concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$.
- Se $\alpha = \varepsilon$, então $x = 1$ e $\gamma = 1^i0^k$. Então por HI (2), vale que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$.

Demonstração do Lema 1 (cont.)

(3 $\Leftarrow$) "$\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$" $\Rightarrow$ "$\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$"

Suponha que $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Temos duas possibilidades, de acordo com o conteúdo de α:

- Se $\alpha \neq \varepsilon$, então $\gamma = 1^i0^k1\beta$, com $\alpha = \beta x$. Então por HI (3), vale que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_3$. Como $\hat{\delta}(q_3, x) = q_3$ independente do valor de x, então concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$.
- Se $\alpha = \varepsilon$, então $x = 1$ e $\gamma = 1^i0^k$. Então por HI (2), vale que $\hat{\delta}(q_1, \gamma) = q_2$. Como $\delta(q_2, x) = q_3$, concluímos que $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$.

C.Q.D.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $\omega \in \{0,1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i0^k1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Teorema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : 01$ é subcadeia de $\omega\}$. Então $L(M_1) = X$.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $\omega \in \{0,1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i0^k1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Teorema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$. Então $L(M_1) = X$.

Demonstração. Seja $\omega \in X$.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $\omega \in \{0,1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Teorema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$. Então $L(M_1) = X$.

Demonstração. Seja $\omega \in X$. Então $\omega = \alpha 01 \beta$.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $\omega \in \{0,1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Teorema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : 01$ é subcadeia de $\omega\}$. Então $L(M_1) = X$.

Demonstração. Seja $\omega \in X$. Então $\omega = \alpha 01 \beta$. Pelo Lema 1, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$, o que implica em $\omega \in L(M_1)$.

Agora seja $\omega \in L(M_1)$.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $\omega \in \{0,1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Teorema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : 01 \text{ é subcadeia de } \omega\}$. Então $L(M_1) = X$.

Demonstração. Seja $\omega \in X$. Então $\omega = \alpha 01 \beta$. Pelo Lema 1, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$, o que implica em $\omega \in L(M_1)$.

Agora seja $\omega \in L(M_1)$. Então $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $\omega \in \{0,1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i0^k1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Teorema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : 01$ é subcadeia de $\omega\}$. Então $L(M_1) = X$.

Demonstração. Seja $\omega \in X$. Então $\omega = \alpha 01 \beta$. Pelo Lema 1, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$, o que implica em $\omega \in L(M_1)$.

Agora seja $\omega \in L(M_1)$. Então $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Pelo Lema 1, $\omega = 1^i0^k1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$, que claramente contém 01.

Demonstrando a linguagem de um AFD

Lema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $\omega \in \{0,1\}^*$. Vale que

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = 1^i$ para algum $i \geq 0$.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega = 1^i 0^k$ para algum $i \geq 0$ e $k \geq 1$.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$.

Teorema 1

Sejam M_1 o AFD definido anteriormente e $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : 01$ é subcadeia de $\omega\}$. Então $L(M_1) = X$.

Demonstração. Seja $\omega \in X$. Então $\omega = \alpha 01 \beta$. Pelo Lema 1, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$, o que implica em $\omega \in L(M_1)$.

Agora seja $\omega \in L(M_1)$. Então $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3$. Pelo Lema 1, $\omega = 1^i 0^k 1\alpha$ para algum $i \geq 0$, $k \geq 1$ e $\alpha \in \Sigma^*$, que claramente contém 01. Logo, $\omega \in X$. C.Q.D.

Outra possibilidade

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \iff \omega = \varepsilon$ ou ω não contém 01 como subcadeia e termina em 1.

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \iff \omega$ não contém 01 como subcadeia e termina em 0.

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \iff \omega$ contém 01 como subcadeia.