Disciplina CCM-104 – Teoria da Computação

Fechamento de linguagens regulares

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/∼carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

Aviso legal

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre LRs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

Propriedades de linguagens regulares

Operações regulares

Sejam A e B linguagens.

São operações regulares:

- **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
- **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e } x_i \in A\}$

Operações regulares

Considere $L = \{1, 01, 010\}$ e $M = \{\varepsilon, 11\}$.

$$L \cup M = \{\varepsilon, 1, 01, 11, 010\}$$

$$LM = \{1, 111, 01, 0111, 010, 01011\}$$

$$ML = \{1, 01, 010, 111, 1101, 11010\}$$

$$L^* = \{\varepsilon, 1, 11, 101, 010, 0101, 1010, 11101010, \ldots\}$$

Propriedades das operações regulares

Sejam A, B e C linguagens regulares. Valem as seguintes propriedades:

1. $A \cup B = B \cup A$ (comut.)
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (assoc.)
3. $A(BC) = (AB)C$ (assoc.)
4. $A(B \cup C) = AB \cup AC$ (distr.)
5. $(A \cup B)C = AC \cup BC$ (distr.)
6. $\emptyset A = A\emptyset = \emptyset$ (aniq.)
7. $\{\varepsilon\}A = A\{\varepsilon\} = A$ (ident.)
8. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ (ident.)
9. $A \cup A = A$ (idemp.)
10. $(A^*)^* = A^*$ (fecham.)
11. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ (fecham.)
12. $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$ (fecham.)

Propriedades de fechamento de linguagens regulares

- Uma coleção de objetos é *fechada sob* alguma operação se, aplicando-se essa operação a membros da coleção, recebe-se um objeto ainda na coleção.
  - Por exemplo, números naturais são fechados sob a operação de soma.
  - Por exemplo, números naturais não são fechados sob a operação de divisão.

Propriedades de fechamento de linguagens regulares

As linguagens regulares são fechadas sob:

1. União (teorema a seguir)
2. Concatenação (teorema a seguir)
3. Estrela (teorema a seguir)
4. Interseção (exercício na lista 1)
5. Complemento (respondido na lista 1)
6. Diferença (exercício)
7. Reverso (exercício na lista 1)

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

União

Theorem

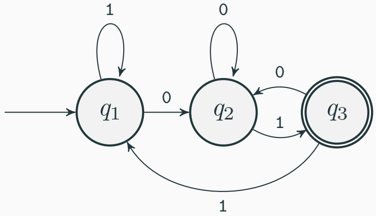
A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

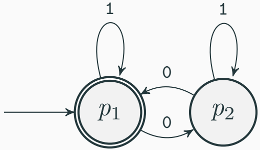
Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.
A ideia é criar um AFD que reconhece $A_1 \cup A_2$ fazendo-o simular M_1 e M_2 simultaneamente.
Para isso, o AFD precisa lembrar qual o estado ativo em M_1 e qual o estado ativo em M_2 em cada momento da entrada.

União

M_1



M_2



União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $x \in \Sigma$, $\quad \delta((r_1, r_2), x) = (\ \delta_1(r_1, x),\ \delta_2(r_2, x)\ )$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1$ e $r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $x \in \Sigma$, $\quad \delta((r_1, r_2), x) = (\ \delta_1(r_1, x),\ \delta_2(r_2, x)\ )$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1$ ou $r_2 \in F_2\}$

Resta mostrar que $L(M) = A_1 \cup A_2$.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \iff \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Agora, suponha que $\omega \in L(M)$.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Agora, suponha que $\omega \in L(M)$.
Então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \in F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Agora, suponha que $\omega \in L(M)$.
Então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \in F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$.
Assim, digamos que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$.

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0,\omega) = (r_i, r_j) \iff \hat{\delta}_1(q_1,\omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2,\omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Agora, suponha que $\omega \in L(M)$.
Então $\hat{\delta}(q_0,\omega) \in F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$.
Assim, digamos que $\hat{\delta}(q_0,\omega) = (t_1, t_2)$.
Por $\star$, vale que $\hat{\delta}_1(q_1,\omega) = t_1$ e $\hat{\delta}_2(q_2,\omega) = t_2$.

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

Primeiro precisamos mostrar que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Agora, suponha que $\omega \in L(M)$.
Então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \in F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$.
Assim, digamos que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$.
Por $\star$, vale que $\hat{\delta}_1(q_1, \omega) = t_1$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = t_2$.
Por definição de F, temos $t_1 \in F_1$ ou $t_2 \in F_2$, ou seja, $\omega \in A_1$ ou $\omega \in A_2$.

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0,\omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}_1(q_1,\omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2,\omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Por fim, suponha que $\omega \in A_1 \cup A_2$.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta_1}(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta_2}(q_2, \omega) = r_j \,.\text{(ex.)} \qquad \star$$

Por fim, suponha que $\omega \in A_1 \cup A_2$.
Denotando $t_1 = \hat{\delta_1}(q_1, \omega)$ e $t_2 = \hat{\delta_2}(q_2, \omega) = t_2$, sabemos que $t_1 \in F_1$ ou $t_2 \in F_2$.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \iff \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Por fim, suponha que $\omega \in A_1 \cup A_2$.
Denotando $t_1 = \hat{\delta}_1(q_1, \omega)$ e $t_2 = \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = t_2$, sabemos que $t_1 \in F_1$ ou $t_2 \in F_2$.
Por $\star$, vale que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$.

União

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração (cont.).

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta_1}(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta_2}(q_2, \omega) = r_j \text{ .(ex.)} \qquad \star$$

Por fim, suponha que $\omega \in A_1 \cup A_2$.
Denotando $t_1 = \hat{\delta_1}(q_1, \omega)$ e $t_2 = \hat{\delta_2}(q_2, \omega) = t_2$, sabemos que $t_1 \in F_1$ ou $t_2 \in F_2$.
Por $\star$, vale que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (t_1, t_2)$.
Então por definição de F, temos $(t_1, t_2) \in F$, de onde vemos que $\omega \in L(M)$. C.Q.D.

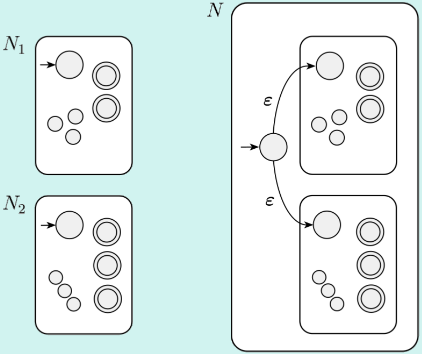
União - Outra demonstração

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Ideia da demonstração.

Criar um único AFN que reconhece $A_1 \cup A_2$ se aproveitando da onisciência do não determinismo:



União - Outra demonstração

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ AFNs que as reconhecem, respectivamente.

União - Outra demonstração

Theorem

A união de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ AFNs que as reconhecem, respectivamente.

Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
- Para $q \in Q$ e $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\delta(q, x) = \begin{cases} \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, x) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } x = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } x \neq \varepsilon \end{cases}$
- $F = F_1 \cup F_2$

Note que $L(N) = A_1 \cup A_2$ porque ... C.Q.D.

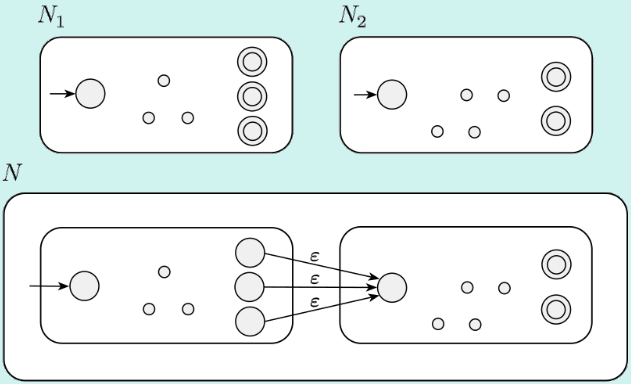
Concatenação

Theorem

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Ideia da demonstração.

Criar um único AFN que reconhece $A_1 A_2$ se aproveitando da onisciência do não determinismo:



Concatenação

Theorem

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ AFNs que as reconhecem, respectivamente.

Concatenação

Theorem

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ AFNs que as reconhecem, respectivamente.
Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- Para $q \in Q$ e $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\delta(q,x) = \begin{cases} \delta_1(q,x) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,x) & \text{se } q \in F_1 \text{ e } x \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,x) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } x = \varepsilon \\ \delta_2(q,x) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$
- $q_0 = q_1$
- $F = F_2$

Note que $L(N) = A_1 A_2$ porque ... C.Q.D.

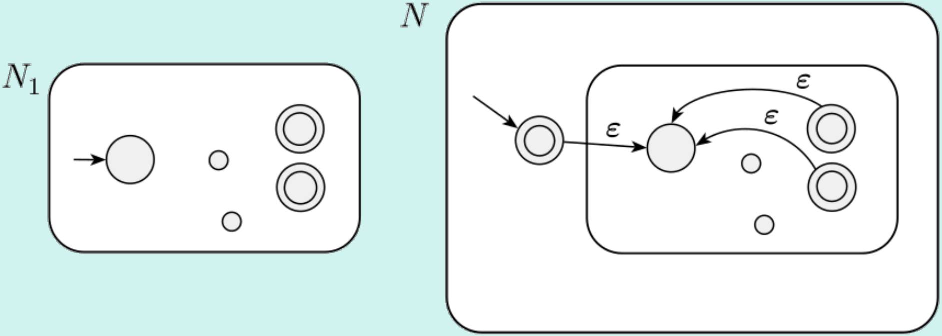
Estrela

Theorem

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Ideia da demonstração.

Criar um único AFN que reconhece A^* se aproveitando da onisciência do não determinismo:



Estrela

Theorem

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Demonstração.

Sejam A uma linguagem regular. Seja $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ um AFN que a reconhece.

Estrela

Theorem

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Demonstração.

Sejam A uma linguagem regular. Seja $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ um AFN que a reconhece.
Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1$
- Para $q \in Q$ e $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\delta(q, x) = \begin{cases} \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } x \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, x) \cup \{q_1\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } x = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } x = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } x \neq \varepsilon \end{cases}$
- $F = \{q_0\} \cup F_1$

Note que $L(N) = A^*$ porque ... C.Q.D.

Estrela

Por que a demonstração do fechamento sob estrela precisou criar um estado inicial novo?

Estrela

Por que a demonstração do fechamento sob estrela precisou criar um estado inicial novo?