Disciplina CCM-104 – Teoria da Computação

Lema do bombeamento para linguagens regulares

Profa. Carla Negri Lintzmayer

carla.negri@ufabc.edu.br

www.professor.ufabc.edu.br/~carla.negri

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

Aviso legal

Estes slides não contêm um conteúdo completo sobre LRs: são apenas um apoio gráfico a uma aula específica dada em sala.

E quando não conseguimos fazer AFDs / AFNs?

Autômatos finitos são limitados

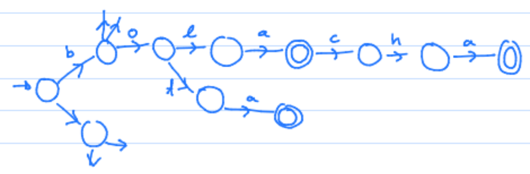
Classifique as linguagens:

- $A = \{0^n : n \geq 1\}$
- $B = \{1^n : n \geq 1\}$
- AB
- $C = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$
- $D = \{\omega \in \{0,1\}^* : |\omega|_0 = |\omega|_1\}$
- $E = \{\omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ tem o mesmo número de ocorrências de 01 e 10}\}$

Cadeias vs. Números de estados

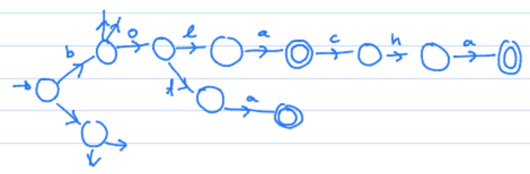
- Toda linguagem que possui um número finito de cadeias é regular

- Toda linguagem que possui um número finito de cadeias é regular
  Exemplo: L é a linguagem que contém todas as palavras da língua portuguesa



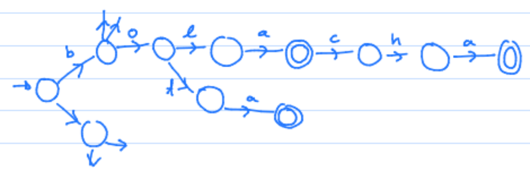
Cadeias vs. Números de estados

- Toda linguagem que possui um número finito de cadeias é regular
  Exemplo: L é a linguagem que contém todas as palavras da língua portuguesa

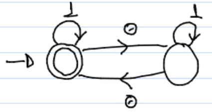


- Como podem existir linguagens regulares com um número infinito de cadeias?

- Toda linguagem que possui um número finito de cadeias é regular
  Exemplo: L é a linguagem que contém todas as palavras da língua portuguesa

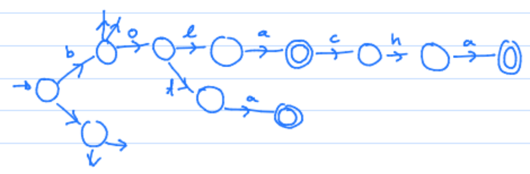


- Como podem existir linguagens regulares com um número infinito de cadeias?
  Exemplo: $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : |\omega|_0 \text{ é par}\}$

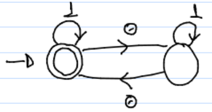


Cadeias vs. Números de estados

- Toda linguagem que possui um número finito de cadeias é regular
  Exemplo: L é a linguagem que contém todas as palavras da língua portuguesa



- Como podem existir linguagens regulares com um número infinito de cadeias?
  Exemplo: $L = \{\omega \in \{0,1\}^* : |\omega|_0 \text{ é par}\}$



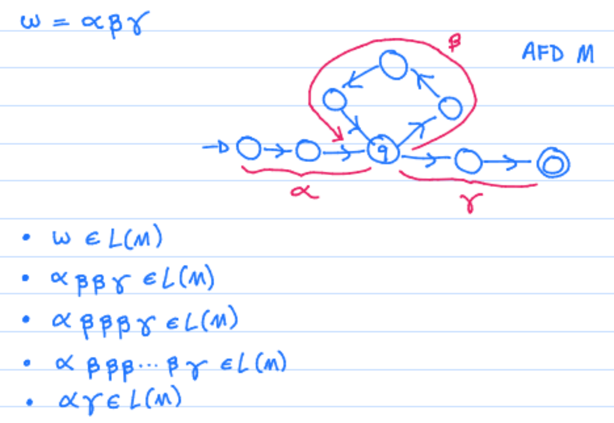
- Qual a maior cadeia que um AFD com n estados pode aceitar sem usar um ciclo?
  R: $n-1$: se ω é uma cadeia da linguagem e $|\omega| \geq n$, então a sequência de estados de aceitação de ω contém um ciclo.

Cadeias vs. Números de estados

Ideia chave: Se você pode seguir um ciclo uma vez, então você pode segui-lo quantas vezes quiser e continuar aceitando cadeias da linguagem.

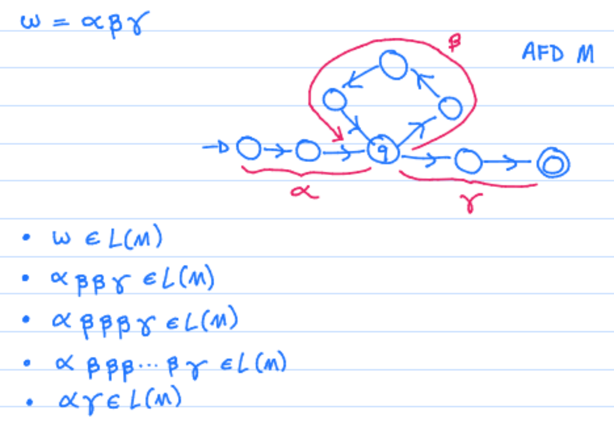
Cadeias vs. Números de estados

Ideia chave: Se você pode seguir um ciclo uma vez, então você pode segui-lo quantas vezes quiser e continuar aceitando cadeias da linguagem.



Cadeias vs. Números de estados

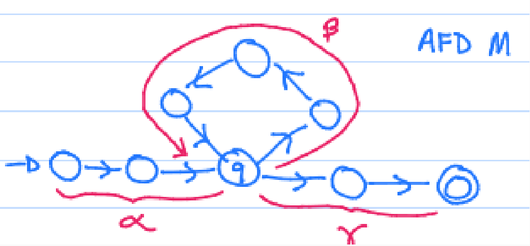
Ideia chave: Se você pode seguir um ciclo uma vez, então você pode segui-lo quantas vezes quiser e continuar aceitando cadeias da linguagem.



Obs.: Toda cadeia $\omega = \alpha\beta^i\gamma$ é tal que $\omega \in L(M)$ para $i \geq 0$.

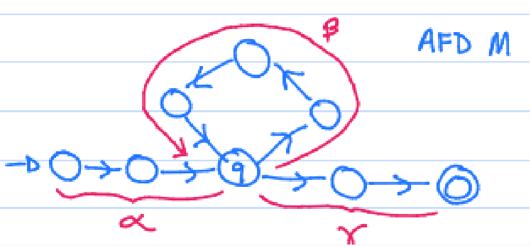
Cadeias com repetição de estados

Se a linguagem for regular e ω for suficientemente longa, i.e., $|\omega| \geq p$, p é o comprimento de bombeamento – longo o suficiente para forçar toda cadeia a ter um ciclo



Cadeias com repetição de estados

Se a linguagem for regular e ω for suficientemente longa, i.e., $|\omega| \geq p$, p é o comprimento de bombeamento – longo o suficiente para forçar toda cadeia a ter um ciclo



então para $\omega = \alpha\beta\gamma$ temos:

1. $\alpha\beta^i\gamma$ pertence à linguagem, para $i \geq 0$;
2. $|\beta| > 0$ (o ciclo precisa de ao menos um arco)
3. $|\alpha\beta| \leq p$ (o ciclo acontece "no começo")

Cadeias com repetição de estados

$$w = \overbrace{a_1\, a_2 \cdots}^{\alpha}\ \overbrace{a_{i+1} \cdots a_{j-1}\, a_j}^{\beta}$$

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, \underset{\substack{\parallel \\ q}}{q_i}, q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}, \underset{\substack{\parallel \\ q}}{q_j}, q_{j+1}, \ldots, q_k$$

$\rightarrow$ $q_0 \cdots q_{j-1}$ são estados distintos

$\Rightarrow$ $j-1 < p$ $\Rightarrow$ $j \leq p$

$$|\alpha\beta| = j \leq p$$

O que descobrimos?

- Se uma linguagem é regular, então existe um comprimento p (comprimento de bombeamento) tal que toda cadeia de comprimento maior do que p pode ser "bombeada".

O que descobrimos?

- Se uma linguagem é regular, então existe um comprimento p (comprimento de bombeamento) tal que toda cadeia de comprimento maior do que p pode ser "bombeada".
- O Lema do Bombeamento é um resultado que afirma que todas as linguagens regulares têm essa propriedade.

O que descobrimos?

- Se uma linguagem é regular, então existe um comprimento p (comprimento de bombeamento) tal que toda cadeia de comprimento maior do que p pode ser "bombeada".
- O Lema do Bombeamento é um resultado que afirma que todas as linguagens regulares têm essa propriedade.
- Então se uma dada linguagem não tem essa propriedade, ela não pode ser regular!

O que descobrimos?

- Se uma linguagem é regular, então existe um comprimento p (comprimento de bombeamento) tal que toda cadeia de comprimento maior do que p pode ser "bombeada".
- O Lema do Bombeamento é um resultado que afirma que todas as linguagens regulares têm essa propriedade.
- Então se uma dada linguagem não tem essa propriedade, ela não pode ser regular!
- Infelizmente, se uma linguagem tem a propriedade, não significa que ela é regular.
  - Só se prova que uma linguagem é regular mostrando um AFD, AFN ou ER para ela ou então usando propriedades de fechamento.

Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$

(2) $|\alpha\beta| \leq p$

(3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Usando o lema do bombeamento

- Se a linguagem é regular, então existe forma de bombear suas cadeias
  "$\exists p, \forall \omega \in L$ com $|\omega| \geq p, \exists \alpha, \beta, \gamma$ com $\omega = \alpha\beta\gamma$: (1), (2) e (3) valem"

Usando o lema do bombeamento

- Se a linguagem é regular, então existe forma de bombear suas cadeias "$\exists p, \forall \omega \in L$ com $|\omega| \geq p, \exists \alpha, \beta, \gamma$ com $\omega = \alpha\beta\gamma$: (1), (2) e (3) valem"
- Dada uma linguagem L, para provar que ela não é regular, vamos fazer uma prova por contradição e assumir que ela é regular.
- Então a afirmação acima tem que valer para L.

Usando o lema do bombeamento

- Se a linguagem é regular, então existe forma de bombear suas cadeias
  "$\exists p, \forall \omega \in L$ com $|\omega| \geq p$, $\exists \alpha, \beta, \gamma$ com $\omega = \alpha\beta\gamma$: (1), (2) e (3) valem"
- Dada uma linguagem L, para provar que ela não é regular, vamos fazer uma prova por contradição e assumir que ela é regular.
- Então a afirmação acima tem que valer para L.
- Vamos mostrar que
  "$\forall p, \exists \omega \in L$ com $|\omega| \geq p$, $\forall \alpha, \beta, \gamma$ com $\omega = \alpha\beta\gamma$: (1), (2) ou (3) não vale"

Usando o lema do bombeamento

- Assumindo que o lema vale para L, tome p como o comprimento do bombeamento garantido pelo lema. (não sabemos qual é, não podemos assumir um valor para p)

Usando o lema do bombeamento

- Assumindo que o lema vale para L, tome p como o comprimento do bombeamento garantido pelo lema. (não sabemos qual é, não podemos assumir um valor para p)
- Escolha uma cadeia ω com $|\omega| \geq p$. (uma cadeia específica e conveniente, que pertença à linguagem – podemos não acertar de primeira!)

Usando o lema do bombeamento

- Assumindo que o lema vale para L, tome p como o comprimento do bombeamento garantido pelo lema. (não sabemos qual é, não podemos assumir um valor para p)
- Escolha uma cadeia ω com $|\omega| \geq p$. (uma cadeia específica e conveniente, que pertença à linguagem – podemos não acertar de primeira!)
- Vamos observar todas as divisões de ω em três partes $\alpha\beta\gamma$.

Usando o lema do bombeamento

- Assumindo que o lema vale para L, tome p como o comprimento do bombeamento garantido pelo lema. (não sabemos qual é, não podemos assumir um valor para p)
- Escolha uma cadeia ω com $|\omega| \geq p$. (uma cadeia específica e conveniente, que pertença à linguagem – podemos não acertar de primeira!)
- Vamos observar todas as divisões de ω em três partes $\alpha\beta\gamma$.
- Para $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta = \varepsilon$, certamente (1) não vale.
- Então podemos observar apenas as divisões $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta \neq \varepsilon$.

Usando o lema do bombeamento

- Assumindo que o lema vale para L, tome p como o comprimento do bombeamento garantido pelo lema. (não sabemos qual é, não podemos assumir um valor para p)
- Escolha uma cadeia ω com $|\omega| \geq p$. (uma cadeia específica e conveniente, que pertença à linguagem – podemos não acertar de primeira!)
- Vamos observar todas as divisões de ω em três partes $\alpha\beta\gamma$.
- Para $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta = \varepsilon$, certamente (1) não vale.
- Então podemos observar apenas as divisões $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta \neq \varepsilon$.
- Dessas, quando $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $|\alpha\beta| > p$, certamente (2) não vale.
- Então podemos observar as divisões $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.

Usando o lema do bombeamento

- Assumindo que o lema vale para L, tome p como o comprimento do bombeamento garantido pelo lema. (não sabemos qual é, não podemos assumir um valor para p)
- Escolha uma cadeia ω com $|\omega| \geq p$. (uma cadeia específica e conveniente, que pertença à linguagem – podemos não acertar de primeira!)
- Vamos observar todas as divisões de ω em três partes $\alpha\beta\gamma$.
- Para $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta = \varepsilon$, certamente (1) não vale.
- Então podemos observar apenas as divisões $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta \neq \varepsilon$.
- Dessas, quando $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $|\alpha\beta| > p$, certamente (2) não vale.
- Então podemos observar as divisões $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.
- Agora resta mostrar que quando $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, para algum $i \neq 1$ teremos $\alpha\beta^i\gamma \notin L$.

Usando o lema do bombeamento

- Assumindo que o lema vale para L, tome p como o comprimento do bombeamento garantido pelo lema. (não sabemos qual é, não podemos assumir um valor para p)
- Escolha uma cadeia ω com $|\omega| \geq p$. (uma cadeia específica e conveniente, que pertença à linguagem – podemos não acertar de primeira!)
- Vamos observar todas as divisões de ω em três partes $\alpha\beta\gamma$.
- Para $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta = \varepsilon$, certamente (1) não vale.
- Então podemos observar apenas as divisões $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta \neq \varepsilon$.
- Dessas, quando $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $|\alpha\beta| > p$, certamente (2) não vale.
- Então podemos observar as divisões $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.
- Agora resta mostrar que quando $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, para algum $i \neq 1$ teremos $\alpha\beta^i\gamma \notin L$.
- Então entramos em contradição ao mostrar que ω não pode ser bombeada e a conclusão é que L não é regular!

Exemplos

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n \colon n \geq 0\}$ não é regular.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ não é regular.

Tome $\omega = 0^p 1^p$ e vamos bombear nos seguintes casos:

Caso 1: $\omega = 0\,0\,0\,\underbrace{0\,0\,0}_{\beta}\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1$

Caso 2: $\omega = 0\,0\,0\,0\,0\,\underbrace{0\,0\,1\,1}_{\beta}\,1\,1\,1\,1\,1$

caso 3: $\omega = 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,\underbrace{1\,1\,1\,1}_{\beta}\,1\,1$

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n \colon n \geq 0\}$ não é regular.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_1 é regular.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_1 é regular. Então vale o lema do bombeamento.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_1 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 1^p$.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n1^n \colon n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_1 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_1 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n \colon n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_1 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r 0^t 0^t 0^{p-r-t} 1^p$. Mas $r + 2t + p - r - t = p + t$, de onde vemos que $\alpha\beta^2\gamma \notin L_1$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Exercício 1

Prove que a linguagem $L_1 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_1 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r 0^t 0^t 0^{p-r-t} 1^p$. Mas $r + 2t + p - r - t = p + t$, de onde vemos que $\alpha\beta^2\gamma \notin L_1$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Logo, L_1 não é regular.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda\colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 0^p$.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 0^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p0^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p0^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r0^t0^t0^{p-r-t}0^p = 0^{p+t}0^p$.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 0^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r 0^t 0^t 0^{p-r-t} 0^p = 0^{p+t} 0^p$. ERRO!?

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda\colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Então vale o lema do bombeamento.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 1 0^p 1$.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p10^p1$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda\colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p 1 0^p 1$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p10^p1$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r0^t0^t0^{p-r-t}10^p1$. Mas $r + 2t + p - r - t = p + t$, e não há forma de dividir $0^{p+t}10^p1$ em duas partes iguais. Logo, $\alpha\beta^2\gamma \notin L_2$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Exercício 2

Prove que a linguagem $L_2 = \{\lambda\lambda \colon \lambda \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

Assuma que L_2 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^p10^p1$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r0^t0^t0^{p-r-t}10^p1$. Mas $r + 2t + p - r - t = p + t$, e não há forma de dividir $0^{p+t}10^p1$ em duas partes iguais. Logo, $\alpha\beta^2\gamma \notin L_2$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Logo, L_2 não é regular.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1} 1^p$.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r 0^t 0^t 0^{p+1-r-t} 1^p$. Mas $r + 2t + p + 1 - r - t = p + 1 + t$, e $0^{p+t+1}1^p \in L_3$....

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\beta\gamma = 0^r 0^t 0^t 0^{p+1-r-t} 1^p$. Mas $r + 2t + p + 1 - r - t = p + 1 + t$, e $0^{p+t+1}1^p \in L_3$....

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j \colon i > j\}$ não é regular.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j \colon i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j \colon i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^0\gamma = \alpha\gamma = 0^r 0^{p+1-r-t} 1^p$. Mas $r + p + 1 - r - t = p + 1 - t \leq p$, já que $t \geq 1$.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j \colon i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^0\gamma = \alpha\gamma = 0^r 0^{p+1-r-t} 1^p$. Mas $r + p + 1 - r - t = p + 1 - t \leq p$, já que $t \geq 1$.

Logo, $\alpha\gamma \notin L_3$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Exercício 3

Prove que a linguagem $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$ não é regular.

Assuma que L_3 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 0^{p+1}1^p$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Em qualquer divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$, certamente $\beta = 0^t$ para algum $t \geq 1$ e $\alpha = 0^r$ para algum $r \geq 0$.

Assim, $\alpha\beta^0\gamma = \alpha\gamma = 0^r 0^{p+1-r-t} 1^p$. Mas $r + p + 1 - r - t = p + 1 - t \leq p$, já que $t \geq 1$.

Logo, $\alpha\gamma \notin L_3$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Logo, L_3 não é regular.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_4 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 1^{p^2}$.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_4 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 1^{p^2}$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_4 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 1^{p^2}$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Vamos considerar uma divisão divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.

Note que $|\alpha\beta\gamma| = p^2$. Ademais, como $|\alpha\beta| \leq p$, então $|\beta| \leq p$.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_4 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 1^{p^2}$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Vamos considerar uma divisão divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.

Note que $|\alpha\beta\gamma| = p^2$. Ademais, como $|\alpha\beta| \leq p$, então $|\beta| \leq p$.

Assim, $|\alpha\beta^2\gamma| = |\alpha\beta\gamma| + |\beta| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_4 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 1^{p^2}$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Vamos considerar uma divisão divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.

Note que $|\alpha\beta\gamma| = p^2$. Ademais, como $|\alpha\beta| \leq p$, então $|\beta| \leq p$.

Assim, $|\alpha\beta^2\gamma| = |\alpha\beta\gamma| + |\beta| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$.

Por outro lado, como $|\beta| > 0$, então $|\alpha\beta^2\gamma| > |\alpha\beta\gamma| = p^2$.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_4 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 1^{p^2}$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Vamos considerar uma divisão divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.

Note que $|\alpha\beta\gamma| = p^2$. Ademais, como $|\alpha\beta| \leq p$, então $|\beta| \leq p$.

Assim, $|\alpha\beta^2\gamma| = |\alpha\beta\gamma| + |\beta| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$.

Por outro lado, como $|\beta| > 0$, então $|\alpha\beta^2\gamma| > |\alpha\beta\gamma| = p^2$.

Mas então $p^2 < |\alpha\beta^2\gamma| < (p+1)^2$, o que faz $\alpha\beta^2\gamma \notin L_4$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Exercício 4

Prove que a linguagem $L_4 = \{1^{n^2} : n \geq 0\}$ não é regular.

Assuma que L_4 é regular. Então vale o lema do bombeamento. Seja p o valor dado pelo lema e tome $\omega = 1^{p^2}$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma$ tal que valem (1), (2) e (3) do lema.

Vamos considerar uma divisão divisão onde $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.

Note que $|\alpha\beta\gamma| = p^2$. Ademais, como $|\alpha\beta| \leq p$, então $|\beta| \leq p$.

Assim, $|\alpha\beta^2\gamma| = |\alpha\beta\gamma| + |\beta| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$.

Por outro lado, como $|\beta| > 0$, então $|\alpha\beta^2\gamma| > |\alpha\beta\gamma| = p^2$.

Mas então $p^2 < |\alpha\beta^2\gamma| < (p+1)^2$, o que faz $\alpha\beta^2\gamma \notin L_4$, o que é uma contradição, pois (3) deveria valer.

Logo, L_4 não é regular.

Exercício 5

Prove que a linguagem $L_5 = \{\omega \in \{0,1\}^* : |\omega|_0 = |\omega|_1\}$ não é regular.

Exercício 5

Prove que a linguagem $L_5 = \{\omega \in \{0,1\}^* : |\omega|_0 = |\omega|_1\}$ não é regular.

Se L_5 fosse regular, então $L_5 \cap \mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$ também seria, pois $\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$ claramente é regular e linguagens regulares são fechadas sob interseção.

Exercício 5

Prove que a linguagem $L_5 = \{\omega \in \{0,1\}^* : |\omega|_0 = |\omega|_1\}$ não é regular.

Se L_5 fosse regular, então $L_5 \cap \mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$ também seria, pois $\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$ claramente é regular e linguagens regulares são fechadas sob interseção.

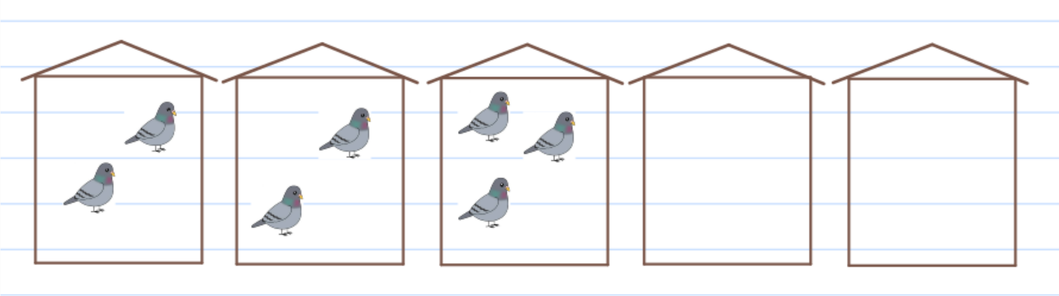
Mas $L_5 \cap \mathbf{0}^*\mathbf{1}^* = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ que, já vimos, não é regular.

Logo, L_5 não é regular.

Prova do lema

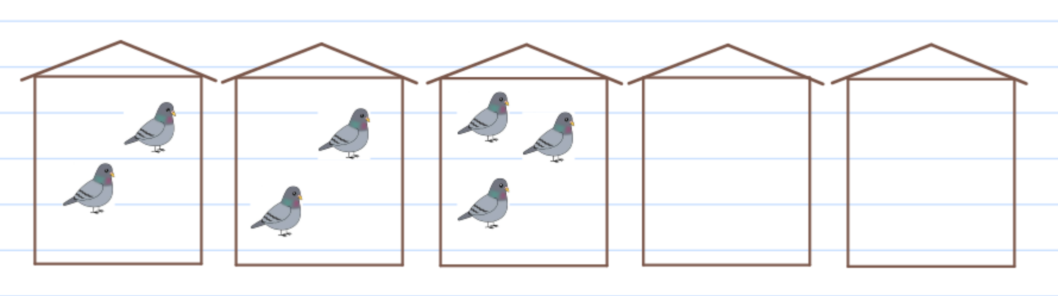
Princípio da casa dos pombos

Se n pombos devem ser posicionados em m casas e $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo.



Princípio da casa dos pombos

Se n pombos devem ser posicionados em m casas e $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo.



O princípio NÃO DIZ que existe uma casa com exatamente dois pombos ou quantas casas podem estar vazias...

Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração: Seja L uma linguagem regular e $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que a reconhece. Seja $p = |Q|$.

Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração: Seja L uma linguagem regular e $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que a reconhece. Seja $p = |Q|$.

Seja ainda $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ tal que $\omega = x_1 x_2 \ldots x_m$, onde cada $x_i \in \Sigma$.

Lema do Bombeamento para LRs

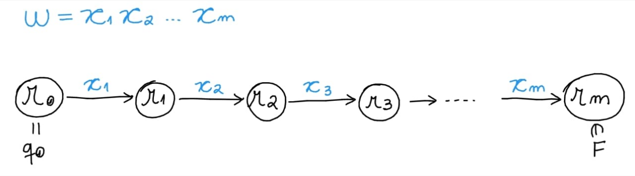
Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração: Seja L uma linguagem regular e $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que a reconhece. Seja $p = |Q|$.

Seja ainda $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ tal que $\omega = x_1 x_2 \dots x_m$, onde cada $x_i \in \Sigma$.

Como $\omega \in L$, existe uma sequência $(r_0, r_1, \dots, r_m)$ de estados pelos quais M passa ao computar ω, isto é, M está no estado r_t após ler os t primeiros símbolos de ω.



Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração (cont.): Como a sequência tem $m+1$ estados e $m \geq p$, então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, os $p+1$ primeiros estados da sequência não são todos diferentes.

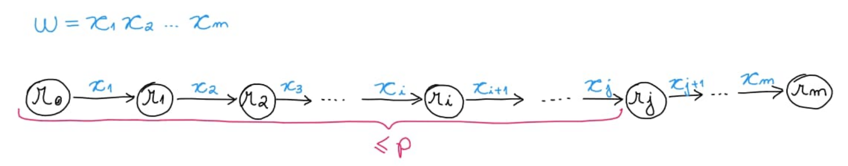
Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração (cont.): Como a sequência tem $m + 1$ estados e $m \geq p$, então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, os $p + 1$ primeiros estados da sequência não são todos diferentes.

Sejam i e j, com $0 \leq i < j \leq p$, posições da sequência tais que $r_i = r_j$.

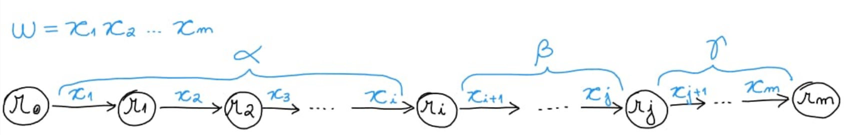


Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração (cont.): Vamos dividir ω em $\alpha\beta\gamma$ onde $\alpha = x_1 \ldots x_i$, $\beta = x_{i+1} \ldots x_j$ e $\gamma = x_{j+1} \ldots x_m$.

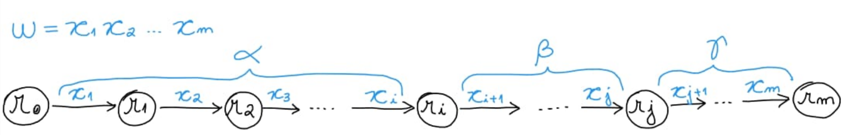


Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração (cont.): Vamos dividir ω em $\alpha\beta\gamma$ onde $\alpha = x_1 \dots x_i$, $\beta = x_{i+1} \dots x_j$ e $\gamma = x_{j+1} \dots x_m$.



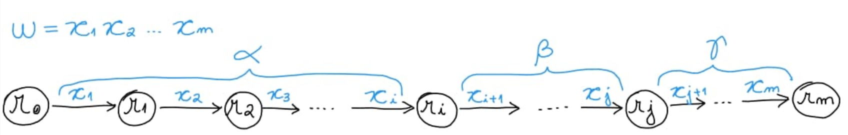
Note que M aceita $\alpha\beta^k\gamma$ para qualquer $k \geq 0$, pois seque a sequência de estados $(r_0, r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_j = r_i, r_{i+1}, \dots, r_j = r_i, \dots, r_{j+1}, \dots, r_m)$.

Lema do Bombeamento para LRs

Se L é uma linguagem regular, então existe um número p tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

(1) $\beta \neq \varepsilon$ (2) $|\alpha\beta| \leq p$ (3) para todo $i \geq 0$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$.

Demonstração (cont.): Vamos dividir ω em $\alpha\beta\gamma$ onde $\alpha = x_1 \dots x_i$, $\beta = x_{i+1} \dots x_j$ e $\gamma = x_{j+1} \dots x_m$.



Note que M aceita $\alpha\beta^k\gamma$ para qualquer $k \geq 0$, pois seque a sequência de estados $(r_0, r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_j = r_i, r_{i+1}, \dots, r_j = r_i, \dots, r_{j+1}, \dots, r_m)$.

Além disso, $\beta \neq \varepsilon$, pois $i < j$, e $|\alpha\beta| \leq p$, pois $j \leq p$. C.Q.D.