Dada uma linguagem, existe GLC que a gera?

$L_1 = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 \geq 3 \}$

$S \to T1T1T1T$

$T \to 0T \mid 1T \mid \varepsilon$

Já vimos que $L(T) = \Sigma^*$.

(1) Se $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, então $w = \alpha 1 \beta 1 \gamma 1 \lambda$, com $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, $S \overset{*}{\Rightarrow} \beta$, $S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ e $S \overset{*}{\Rightarrow} \lambda$.

Assumindo que $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in L_1$, então certamente $w \in L_1$.

(2) Se $w \in L_1$, então $|w|_1 \geq 3$, de forma que $w = \alpha 1 \beta 1 \gamma 1 \lambda$ em que $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \Sigma^*$. Como $L(T) = \Sigma^*$ e $S \Rightarrow T1T1T1T$, então $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

$L_2 = \emptyset$

$S \to S$

Claramente, S não gera cadeias só com terminais.

$L_3 = \{ w \in \{(,)\}^* :$ os parênteses de w são balanceados $\}$

$S \to (S) \mid SS \mid \varepsilon$

(1) Se $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, então $w = \varepsilon$, $w = (\alpha)$ ou $w = \alpha\beta$, com $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ e $S \overset{*}{\Rightarrow} \beta$. Diretamente, $\varepsilon \in L_3$.

Assumindo $\alpha, \beta \in L_3$, então certamente (α), $\alpha\beta \in L_3$.

(2) Se $w \in L_3$, então ou $w = \varepsilon$, ou $w = (\alpha)$ com $\alpha \in L_3$ ou $w = \alpha\beta$ onde ambos $\alpha, \beta \in L_3$. (por quê?)

Diretamente, $S \Rightarrow \varepsilon$.

Assumindo que $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ e $S \overset{*}{\Rightarrow} \beta$, então $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

$L_4 = \{ ww^R : w \in \{a,b\}^* \}$

$S \to \varepsilon \mid aSa \mid bSb$

① Se $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, então $w = \varepsilon$, $w = a\alpha a$ ou $w = b\alpha b$ com $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$.
Diretamente, $S \Rightarrow \varepsilon$.
Assumindo que $\alpha \in L_4$, então certamente $a\alpha a, b\alpha b \in L_4$.

② Se $w \in L_4$, então $w = \alpha\alpha^R$, sendo que w começa e termina com o mesmo símbolo. Então $w = a\beta a$ ou $w = b\beta b$, com $\beta \in L_4$, ou $w = \varepsilon$. Diretamente, $S \Rightarrow \varepsilon$.
Assumindo que $S \overset{*}{\Rightarrow} \beta$, então $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

$L_5 = \{ a^n b^{2n+k} c^{3k} : n, k \geq 0 \}$

$S \to XY$

$X \to aXbb \mid \varepsilon$

$Y \to bYccc \mid \varepsilon$

① Se $Y \overset{*}{\Rightarrow} w$, então $w = \varepsilon$ ou $w = b\alpha ccc$ com $Y \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$. Note $\varepsilon \in B$.
Assumindo que $\alpha \in \{ b^k c^{3k} : k \geq 0 \} = B$, então certamente $w \in B$.

② Se $w \in \{ b^k c^{3k} : k \geq 0 \} = B$, então $w = \varepsilon$ ou $w = b\alpha ccc$ com $\alpha \in B$. Diretamente, $Y \Rightarrow \varepsilon$.
Assumindo que $Y \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, então $Y \overset{*}{\Rightarrow} b\alpha ccc = w$.

① e ② mostram que $L(Y) = B$.

③ Se $X \overset{*}{\Rightarrow} w$, então $w = \varepsilon$ ou $w = a\alpha bb$ com $X \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$. Note $\varepsilon \in A$.
Assumindo que $\alpha \in \{ a^k b^{2k} : k \geq 0 \} = A$, então certamente $w \in A$.

④ Se $w \in \{ a^k b^{2k} : k \geq 0 \} = A$, então $w = \varepsilon$ ou $w = a\alpha bb$ com $\alpha \in A$. Diretamente, $X \Rightarrow \varepsilon$.
Assumindo que $X \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, então $X \overset{*}{\Rightarrow} a\alpha bb = w$.

③ e ④ mostram que $L(X) = A$.

⑤ Se $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, então $w = \alpha\beta$ com $X \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ e $Y \overset{*}{\Rightarrow} \beta$.
Como $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ e $L_5 = AB$, $w \in L_5$.

⑥ Se $w \in L_5$, então $w = a^n b^{2n+k} c^{3k} = a^n b^{2n} b^k c^{3k} = \alpha\beta$, com $\alpha = a^n b^{2n}$ e $\beta = b^k c^{3k}$. Então $\alpha \in L(X)$ e $\beta \in L(Y)$.
Como $S \Rightarrow XY$, $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha\beta$

⑤ e ⑥ mostram que $L_5 = L(S)$.

$L_6 = \{a^n b^m : n \neq m\} = \{a^n b^m : n < m\} \cup \{a^n b^m : n > m\}$

$S \to aSb \mid A \mid B$

$A \to aA \mid a$

$B \to bB \mid b$

Claramente $L(A) = a^+$ e $L(B) = b^+$.

① Se $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, então $w = a^k$ ou $w = b^k$ com $k \geq 1$ ou ou $w = a\alpha b$ com $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$.

Certamente $a^k, b^k \in L_6$ se $k \geq 1$.

Assumindo $\alpha \in L_6$, então $|\alpha|_a \neq |\alpha|_b \Rightarrow |w|_a \neq |w|_b$.

② Se $w \in L_6$, então $w = a^n b^m$ com $n \neq m$.

Se $n > m \geq 1$ ou $1 \leq n < m$, então $w = a\alpha b$ com $\alpha \in L_6$. Nesse caso, se assumirmos $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, então $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Se $n > m = 0$, então $w = a^k$ com $k \geq 1$. Como $w \in L(A)$ e $S \Rightarrow A$, então $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Se $0 = n < m$, então $w = b^k$ com $k \geq 1$. Como $w \in L(B)$ e $S \Rightarrow B$, então $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.