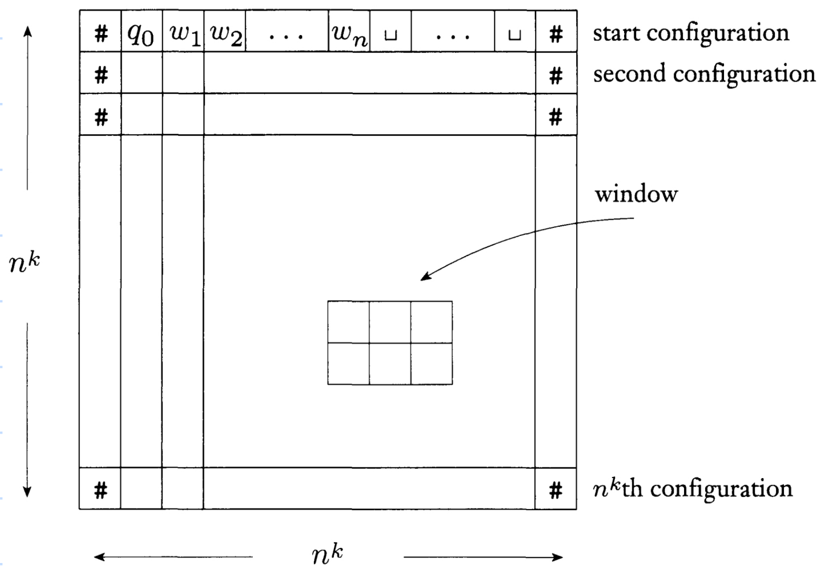
TEOREMA COOK-LEVIN: SAT é NP-completa.

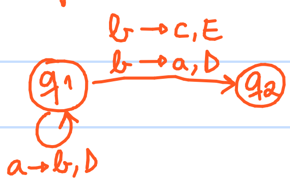
IDÉIA DA DEMONSTRAÇÃO: Primeiro mostramos que SAT $\in$ NP. Depois, fazemos uma redução em tempo polinomial de uma linguagem $A \in NP$ qualquer para SAT. Como A é qualquer, será uma redução de todos os problemas em NP para SAT.

Seja $A \in NP$ e seja $N_A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{AC}, q_{REJ})$ uma MT não determinística decisora de A em tempo $n^k$.
Um TABLEAU para $N_A$ sobre uma cadeia $w \in \Sigma^*$ é uma matriz $n^k \times n^k$ cujas linhas são as configurações de um ramo da computação de $N_A$ sobre w.
Assuma que cada configuração começa e termina com o símbolo #.




Um tableau é ACEITADOR se alguma linha é uma configuração de aceitação.
Em um tableau, toda janela 2×3 de células é dita LEGAL, o que significa que ela não viola os movimentos especificados pela função de transição de $N_A$.

Exemplo:




(a)

| | | |
|---|---|---|
| a | $q_1$ | b |
| $q_2$ | a | c |

(b)

| | | |
|---|---|---|
| a | $q_1$ | b |
| a | a | $q_2$ |

(c)

| | | |
|---|---|---|
| a | a | $q_1$ |
| a | a | b |

(d)

| | | |
|---|---|---|
| # | b | a |
| # | b | a |

(e)

| | | |
|---|---|---|
| a | b | a |
| a | b | $q_2$ |

(f)

| | | |
|---|---|---|
| b | b | b |
| c | b | b |

A redução é alguma função $f$ tal que

$$w \in A \text{ sse } f(w) = \langle \phi \rangle \in SAT.$$

mas $w \in A$ sse $N_A$ aceita $w$.

E $N_A$ aceita $w$ sse existe um tableau aceitador para $N_A$ sobre $w$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $A \in NP$ e seja $N_A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{AC}, q_{REJ})$ uma MT não determinística decisora de $A$ em tempo $n^k$.

Dada $w \in A$, tome seu tableau e construa $\phi$ da seguinte forma.

Seja $C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$.

Criamos as variáveis $x_{i,j,s}$ para $1 \leq i \leq n^k$, $1 \leq j \leq n^k$ e $s \in C$.

Se $x_{i,j,s} = 1$, a célula $[i,j]$ contém um $s$.

Dada $w \in \Sigma^*$, construímos $\phi$:

$$\phi = \phi_{cell} \wedge \phi_{start} \wedge \phi_{move} \wedge \phi_{accept}$$

Veremos cada parte a seguir.

- $\phi_{cell}$ garante que pelo menos um símbolo de $C$ existe por célula e não mais de um:

$$\phi_{cell} = \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n^k} \left[ \left( \bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} \left( \overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}} \right) \right) \right]$$

- $\phi_{start}$ garante que a primeira linha é uma configuração de início. Com $w = w_1 \cdots w_n$:

$$\phi_{start} = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \cdots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \cdots \wedge x_{1,n^k-1,\sqcup} \wedge x_{1,n^k,\#}$$

- $\phi_{accept}$ garante que uma configuração de aceitação ocorra:

$$\phi_{accept} = \bigvee_{1 \leq i,j \leq n^k} x_{i,j,accept}$$

- $\phi_{move}$ garante que cada linha corresponde a uma configuração que legalmente segue da anterior segundo as regras de $N_A$:

$$\phi_{move} = \bigwedge_{\substack{1 < i \leq n^k \\ 1 < j < n^k}} \left[ \bigvee_{\substack{a_1, \dots, a_6 \\ \text{janela legal}}} \left( x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6} \right) \right]$$

Existem $(n^k)^2 = n^{2k}$ células e $|C|$ símbolos, portanto $|C|n^{2k}$ variáveis. Como $|C| = |Q| + |\Gamma| + 1$ independem de $n$, são $O(n^{2k})$ variáveis.

$\phi_{cell}$ tem $\leq |C| + |C|^2$ literais para cada célula $\therefore O(n^{2k})$ tamanho

$\phi_{start}$ tem $n^k$ literais $\therefore O(n^k)$ tamanho

$\phi_{accept}$ tem $n^{2k}$ literais $\therefore O(n^{2k})$ tamanho

$\phi_{move}$ tem um pedaço de tamanho constante para cada célula (há um número fixo, constante de configurações válidas) $\therefore O(n^{2k})$ tamanho.

Os índices das variáveis precisam de tamanho $\log(n^k) = O(\log n)$

Assim, essa redução leva tempo $O(n^{2k} \log n)$.

Resta mostrar que $w \in A$ se e somente se $\langle \phi \rangle \in SAT$.

Se $w \in A$, então existe uma configuração de aceitação. Então existe um tableau de aceitação e fazemos $x_{i,j,s} = true$ se a célula $[i,j]$ tem o símbolo $s$ nesse tableau. Isso satisfaz $\phi$ e $\therefore \langle \phi \rangle \in SAT$.

Se $\langle \phi \rangle \in SAT$, então existe uma atribuição de valores às variáveis que satisfaz $\phi$.

Se $x_{i,j,s} = true$, coloque um $s$ na célula $[i,j]$.

O tableau construído assim é de aceitação.

CQD