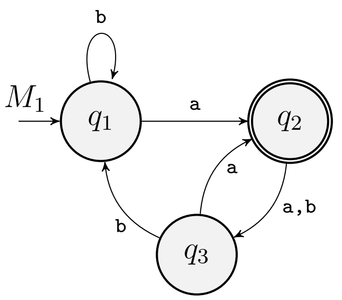
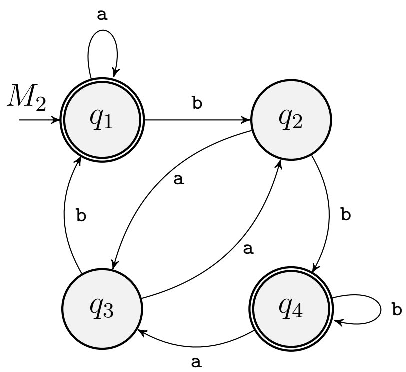
Teoria da Computação
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Lista 1: Linguagens regulares

1. Formalize a descrição dos AFDs M_1 e M_2 a seguir e mostre as sequências de configurações para computação das cadeias $\omega = \texttt{abbaabaaa}$ e $\alpha = \texttt{aabaabbb}$ sobre ambas. Conclua: M_1 aceita ω? M_1 aceita α? M_2 aceita ω? M_2 aceita α?





2. Descreva, por meio de um diagrama, um autômato finito determinístico que reconhece as linguagens a seguir. Justifique corretamente o formato das cadeias em cada estado (não é necessário formalizar as demonstrações).

   (a) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega$ começa com $\texttt{1}$ e termina com $\texttt{0}\}$

   (b) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{0}} \geq 3\}$

   (c) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega$ começa com $\texttt{0}$ e $|\omega|$ é ímpar ou ω começa com $\texttt{1}$ e $|\omega|$ é par$\}$

   (d) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{a}} \geq 3$ e $|\omega|_{\texttt{b}} \geq 2\}$

   (e) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon \omega$ não é igual a $\texttt{aa}$ e não é igual a $\texttt{aaa}\}$

   (f) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{a}}$ é ímpar e ω termina com um $\texttt{b}\}$

   (g) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon \omega$ não contém $\texttt{ab}$ e nem $\texttt{ba}$ como subcadeias$\}$

   (h) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon$ cada bloco de 5 símbolos consecutivos em ω contém pelo menos dois $\texttt{0}$'s$\}$

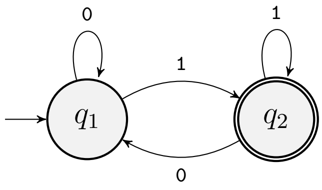
   (i) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{0}}$ é par e $|\omega|_{\texttt{1}}$ é ímpar$\}$

   (j) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega$ começa com $\texttt{1}$ e quando interpretada como inteiro em binário é múltiplo de $5\}$

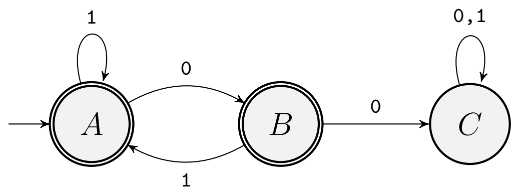
   (k) $\{\texttt{var}, \texttt{function}, \texttt{if}, \texttt{then}, \texttt{else}, \texttt{while}, \texttt{do}, \texttt{let}, \texttt{in}, \texttt{end}, \texttt{printf}, \texttt{getint}\}$, com $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \ldots, \texttt{z}\}$

3. Prove que a linguagem $L = \{\omega \in \Sigma^* \colon \omega$ não tem símbolos repetidos$\}$, com $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$, é regular. Generalize sua prova para uma linguagem sobre qualquer alfabeto Σ com k símbolos.

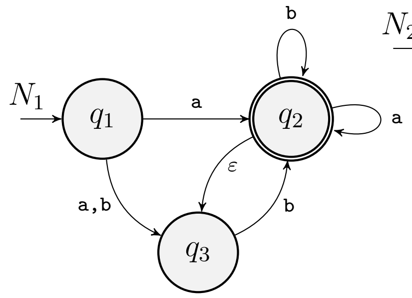
4. Demonstre que a linguagem reconhecida pelo seguinte autômato é a linguagem $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega$ termina em $\texttt{1}\}$.

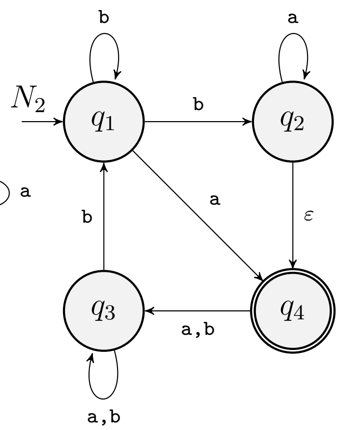


5. Forneça a linguagem reconhecida pelo seguinte autômato, justificando devidamente.



6. Formalize a descrição dos AFNs N_1 e N_2 a seguir e mostre as sequências de configurações para computação das cadeias $\omega = \texttt{abbaab}$ e $\alpha = \texttt{babaab}$ sobre ambas, conforme o exemplo. Conclua: N_1 aceita ω? N_1 aceita α? N_2 aceita ω? N_2 aceita α?





7. Descreva, por meio de diagrama, um autômato finito não determinístico que reconhece as linguagens a seguir. Justifique corretamente o formato das cadeias em cada estado (não é necessário formalizar as demonstrações). Observe que em alguns casos o número de estados é especificado.

   (a) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega = \texttt{1}\alpha\texttt{0} \text{ e } \alpha \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*\}$

   (b) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega \text{ termina com } \texttt{11}\}$ (use até 3 estados)

   (c) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega \text{ começa com } \texttt{0} \text{ e } |\omega| \text{ é ímpar ou } \omega \text{ começa com } \texttt{1} \text{ e } |\omega| \text{ é par}\}$ (até 5 estados)

   (d) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{a}} \text{ é par ou } |\omega|_{\texttt{b}} = 2\}$ (até 6 estados)

   (e) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon \text{ ao menos uma das 4 últimas posições de } \omega \text{ é } \texttt{b}\}$

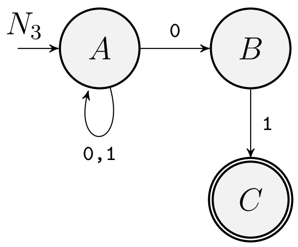
   (f) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega \text{ contém } \texttt{111} \text{ ou } \texttt{000} \text{ como subcadeia}\}$

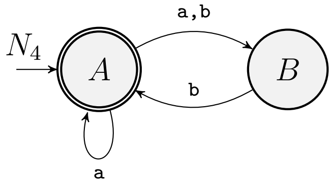
   (g) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega \text{ entre dois } \texttt{1}\text{'s existe um número par de } \texttt{0}\text{'s}\}$

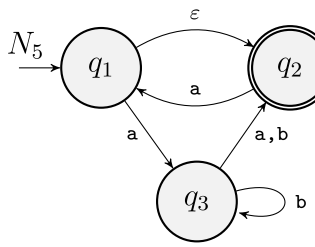
   (h) $\{0^x 1^y 0^z \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1\}$

   (i) $\{\omega \in \Sigma^* \colon \omega \text{ é um comentário de bloco em linguagem C}\}$, com $\Sigma = \{\texttt{/}, \texttt{*}, \texttt{a}, \texttt{b}, \ldots, \texttt{z}\}$

8. Converta os AFNs N_3, N_4 e N_5 a seguir em AFDs usando o método de conversão visto em aula (Teorema 1.39 do livro do Sipser):







9. Seja M um AFD que reconhece uma linguagem L. Seja N o AFD gerado a partir de M quando torna-se estados finais em não finais e vice-versa. Mostre que N reconhece o complemento de L, $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$. Conclua que as linguagens regulares são fechadas sob complemento.

10. Seja M um AFN que reconhece uma linguagem L. Seja N o AFN gerado a partir de M quando torna-se estados finais em não finais e vice-versa. Mostre por meio de um exemplo que N não necessariamente reconhece o complemento de L, $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$. A classe das linguagens reconhecidas por AFNs é fechada sob complemento? Explique sua resposta.

11. Prove que se duas linguagens L e M são regulares, então $L \cap M = \{\omega \colon \omega \in L$ e $\omega \in M\}$ também é regular.

12. Prove que se uma linguagem L é regular, então $L^R = \{\omega^R \colon \omega \in L\}$ também é regular (ω^R é o reverso da cadeia ω).

13. Construa AFDs para as seguintes linguagens:

    (a) $L_1 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{a}}$ é par$\}$
    (b) $L_2 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon$ cada $\mathtt{a}$ é seguido de pelo menos um $\mathtt{b}\}$
    (c) $L_3 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon |\omega|$ é par$\}$
    (d) $L_4 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{a}}$ é ímpar$\}$
    (e) $L_5 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon \omega$ contém a subcadeia $\mathtt{baba}\}$
    (f) $L_6 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon \omega = \mathtt{aa}$ ou $\omega = \mathtt{aaa}\}$
    (g) $L_7 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon \omega$ começa com $\mathtt{a}\}$
    (h) $L_8 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon \omega$ começa com $\mathtt{b}\}$
    (i) $L_9 = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon |\omega|$ é ímpar$\}$
    (j) $L_{10} = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon |\omega|_{\mathtt{b}} = 2\}$
    (k) $L_{11} = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon \omega$ começa com $\mathtt{ab}\ \}$
    (l) $L_{12} = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon \omega$ termina com $\mathtt{ab}\ \}$

14. Usando os AFDs construídos no exercício anterior e as propriedades de fechamento das linguagens regulares, construa AFDs ou AFNs para as seguintes linguagens (não construa autômatos para as linguagens diretamente):

    (a) $R_1 = L_1 \cap L_2$
    (b) $R_2 = L_3 \cap L_4$

(c) $R_3 = \overline{L_5}$
(d) $R_4 = \overline{L_6}$
(e) $R_5 = (L_1 \cap L_9) \cup (L_9 \cap L_3)$
(f) $R_6 = L_1 \cup L_{10}$
(g) $R_7 = L_{11} \cup L_{12}$

15. Dados dois AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que reconhecem, respectivamente, as linguagens A_1 e A_2, seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD construído a partir de M_1 e M_2 tal que

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $x \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x))$.

Obs.: o AFD M promete reconhecer $A_1 \cup A_2$. Prove que

$$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \iff \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i \text{ e } \hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j\,.$$

16. Dados dois AFNs $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que reconhecem, respectivamente, as linguagens A_1 e A_2, seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN construído a partir de N_1 e N_2 tal que

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
- $F = F_1 \cup F_2$
- Para $q \in Q$ e $x \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$,

$$\delta(q, x) = \begin{cases} \delta_1(q, x) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, x) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } x = \epsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } x \neq \epsilon\,. \end{cases}$$

Assuma que $\hat{\delta}(q_i, \omega) = \hat{\delta}_i(q_i, \omega)$, para $i = 1, 2$. Prove que $L(N) = A_1 \cup A_2$.

17. Apresente as linguagens descritas pelas seguintes expressões regulares:

(a) $\mathbf{0}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*\mathbf{1}$
(b) $\mathbf{0}^*(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})\mathbf{1}^*$
(c) $(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})$
(d) $(\mathbf{0} \cup \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{10} \cup \mathbf{1})^*$
(e) $\boldsymbol{\Sigma}^*\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}^*\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}^*\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}^*$, com $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
(f) $\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*$
(g) $(\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*)^*\mathbf{000}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*$

18. Descreva expressões regulares para as seguintes linguagens:

(a) $\{\omega \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \colon |\omega| \geq 3\}$

(b) $\{\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \colon \omega$ começa com $\texttt{1}$ e $|\omega|$ é par$\}$

(c) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon \omega$ contém $\texttt{bb}$ como subcadeia$\}$

(d) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{a}}$ é par$\}$

(e) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{b}} = 1$ ou $|\omega|_{\texttt{b}} = 2\}$

(f) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon \omega$ não contém $\texttt{aba}$ como subcadeia$\}$

(g) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|_{\texttt{a}} \geq 2$ e $|\omega|_{\texttt{b}} \leq 1\}$

(h) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon \omega \neq \texttt{aa}$ e $\omega \neq \texttt{aaa}\}$

19. Prove que as seguintes linguagens não são regulares.

(a) $\{\texttt{0}^n\texttt{1}^n\texttt{2}^n \colon n \geq 0\}$

(b) $\{\omega\omega\omega \colon \omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^*\}$

(c) $\{\texttt{0}^n\texttt{1}\texttt{0}^n \colon n \geq 1\}$

(d) $\{\omega t\omega \colon \omega, t \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^+\}$

(e) $\{\texttt{0}^n\texttt{1}^{2n} \colon n \geq 1\}$

(f) $\{\texttt{0}^n\texttt{1}^m\texttt{2}^n \colon n \geq 1\}$

(g) $\{\texttt{0}^n\texttt{1}^m \colon m \geq n\}$

(h) $\{\texttt{0}^{2^n} \colon n \geq 0\}$

20. Determine se as seguintes linguagens são regulares ou não, justificando cada resposta.

(a) $\{\texttt{0}^m\texttt{1}^n \colon m \neq n\}$

(b) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|$ é par$\}$

(c) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon \omega$ não é palíndromo$\}$

(d) $\{\omega\texttt{1}^n \colon |\omega| = n$ e $\omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*\}$

(e) $\{\texttt{1}^n\omega \colon \omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*$ e $|\omega|_{\texttt{1}} \geq n\}$

(f) $\{\texttt{1}^n\omega \colon \omega \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*$ e $|\omega|_{\texttt{1}} \leq n\}$

(g) $\{\omega \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \colon |\omega|_a = n, |\omega|_b = m,$ e $n \leq 3m/2$ ou $m < n\}$.

21. Considere a linguagem $L = \{\texttt{a}^i\texttt{b}^j\texttt{c}^k \colon i, j, k \geq 0$ e se $i = 1$ então $j = k\}$.

(a) Mostre que L age como uma linguagem regular no lema do bombeamento, isto é, que existe um valor p para o qual L satisfaz as três condições.

(b) Mostre que L não é regular.

(c) Explique por que os itens anteriores não contradizem o lema do bombeamento.

(ENADE 2014)

QUESTÃO 15

Considere as seguintes expressões regulares cujo alfabeto é {a, b}.

R1 = a(a U b)*

R2 = b(a U b)*

Se L(R) é a linguagem associada a uma expressão regular R, é correto afirmar que

A L(R1) = L(R2).

B L(R2) = {w | w termina com b}.

C existe um autômato finito determinístico cuja linguagem é igual a L(R1) U L(R2).

D se R3 é uma expressão regular tal que L(R3) = L(R1) ∩ L(R2), então L(R3) é uma linguagem infinita.

E um autômato finito não determinístico que reconheça L(R1) U L(R2) tem, pelo menos, quatro estados.

(ENADE 2017)

QUESTÃO 23

Considere o seguinte alfabeto:

$\Sigma = \{(,),0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,+,-\}$.

Considere, ainda, uma linguagem L definida sobre esse alfabeto.

$\mathrm{L} = \{\mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in \Sigma^*$, para cada ocorrência de '(' em w, existe uma ocorrência de ')'$\}$

Por exemplo, a cadeia $\mathrm{x} = (2 + (3 - 4))$ pertence a L, mas a cadeia $\mathrm{y} = (2 + (3 - 4)$ não pertence a L.

Com relação à linguagem L, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

I. A linguagem L não pode ser considerada regular.

PORQUE

II. Autômatos finitos não possuem mecanismos que permitam contar infinitamente o número de ocorrências de determinado símbolo em uma cadeia.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

A As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.

B As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

C A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

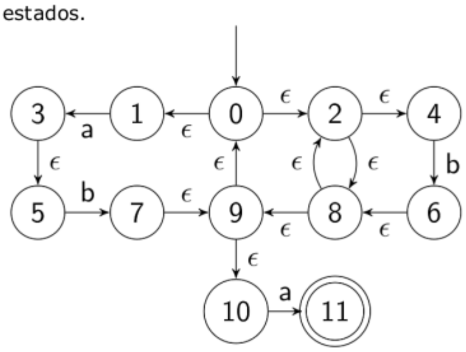
D A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

E As asserções I e II são proposições falsas.

(POSCOMP 2018)

QUESTÃO 63 – O Autômato Finito Não Determinista (AFND) abaixo foi construído utilizando o algoritmo de Thompson tomando-se como base uma determinada Expressão Regular (ER). Esse AFND deve ser transformado para um Autômato Finito Determinístico (AFD), utilizando o algoritmo de subconjuntos. Em relação à ER e à conversão AFND para AFD, considere as assertivas abaixo, assinalando V, se verdadeiras, ou F, se falsas.

( ) A ER de origem é "(ab|b+)+a".
( ) A ER de origem é "(ab|b*)+a".
( ) A ER de origem é "(ab|b*)*a".
( ) O AFD resultante tem 4 estados.
( ) O AFD resultante tem 5 estados.



A ordem correta de preenchimento dos parênteses, de cima para baixo, é:

A) V – F – F – F – V.
B) F – V – F – V – F.
C) F – V – F – F – V.
D) F – F – V – F – V.
E) V – F – V – V – F.