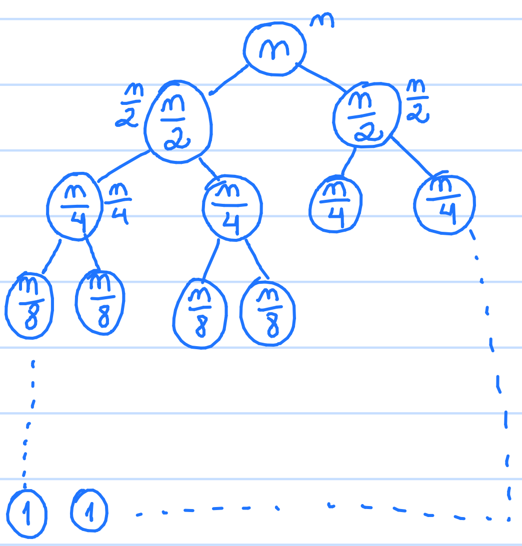
Solução de Recorrências: Método da Árvore de Recursão

→ Consiste em analisar a árvore de recursão:
- ↳ cada nó representa um subproblema / chamada recursiva
- ↳ um nó é rotulado internamente com o tempo gasto naquela chamada (desconsiderando os tempos das chamadas recursivas)
- ↳ um nó é rotulado externamente com o tamanho do subproblema dele
- ↳ os filhos de um nó são as chamadas recursivas feitas nele

→ Então se obtemos o tempo gasto em um nível e somarmos os tempos de todos os níveis, temos uma estimativa de tempo total.

Método da árvore de recursão: exemplo 1

→ Resolva a recorrência $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$



nível	tamanho	# nós	tempo por nó
0	n	1	n
1	$n/2$	2	$n/2$
2	$n/4$	4	$n/4$
3	$n/8$	8	$n/8$
⋮	⋮	⋮	⋮
i	$n/2^i$	2^i	$n/2^i$
⋮	⋮	⋮	⋮
?	$\frac{n}{2^?} = 1$	$2^?$	1

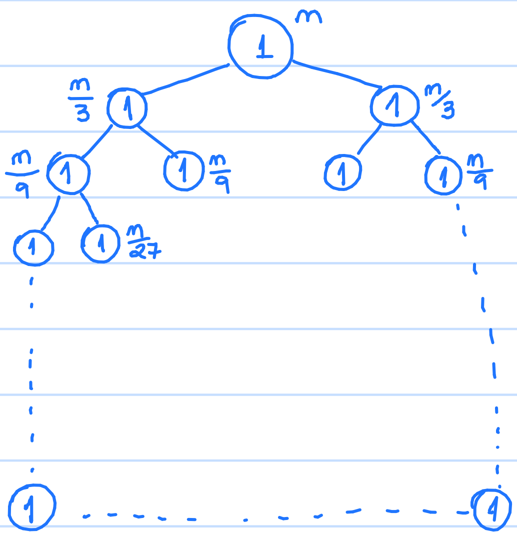
$? = i$ quando $n/2^i = 1 \Rightarrow i = \lg n$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lg n} 2^i \cdot \left(\frac{n}{2^i}\right) = \sum_{i=0}^{\lg n} n = n(\lg n + 1) = n\lg n + n$$

$$\therefore\ T(n) = \Theta(n \lg n)$$

Método da árvore de recursão: exemplo 2

→ Resolva a recorrência $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$



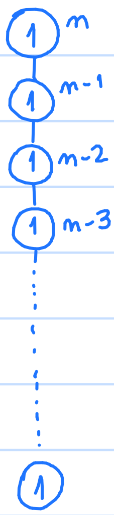
nível	tamanho	# nós	tempo por nó
0	n	1	1
1	$\frac{n}{3}$	2	1
2	$\frac{n}{9}$	4	1
3	$n/27$	8	1
⋮	⋮	⋮	⋮
i	$n/3^i$	2^i	1
⋮	⋮	⋮	⋮
?	$\frac{n}{3^?} = 1$	$2^?$	1

$$n/3^? = 1 \Rightarrow ? = \log_3 n$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_3 n} 1 \cdot 2^i = \left(\frac{2^{\log_3 n + 1} - 1}{2 - 1}\right) = 2 \cdot 2^{\log_3 n} - 1 = 2 \cdot n^{\log_3 2} - 1 = \Theta\left(n^{\log_3 2}\right)$$

Método da árvore de recursão: exemplo 3

→ Resolva a recorrência $T(n) \leq T(n-1) + 1$



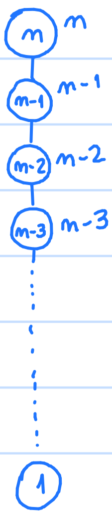
nível	tamanho	# nós	tempo por nó
0	n	1	1
1	$n-1$	1	1
2	$n-2$	1	1
3	$n-3$	1	1
⋮		⋮	⋮
i	$n-i$	1	1
⋮		⋮	⋮
?	$n-? = 1$	1	1

$$n - ? = 1 \Rightarrow ? = n - 1$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot 1 = n = \Theta(n)$$

Método da árvore de recursão: exemplo 4

→ Resolva a recorrência $T(n) \leq T(n-1) + n$



nível	tamanho	# nós	tempo por nó
0	n	1	n
1	$n-1$	1	$n-1$
2	$n-2$	1	$n-2$
3	$n-3$	1	$n-3$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$n-i$	1	$n-i$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$?$	$n-?=1$	1	1

$n - ? = 1 \Rightarrow ? = n-1$

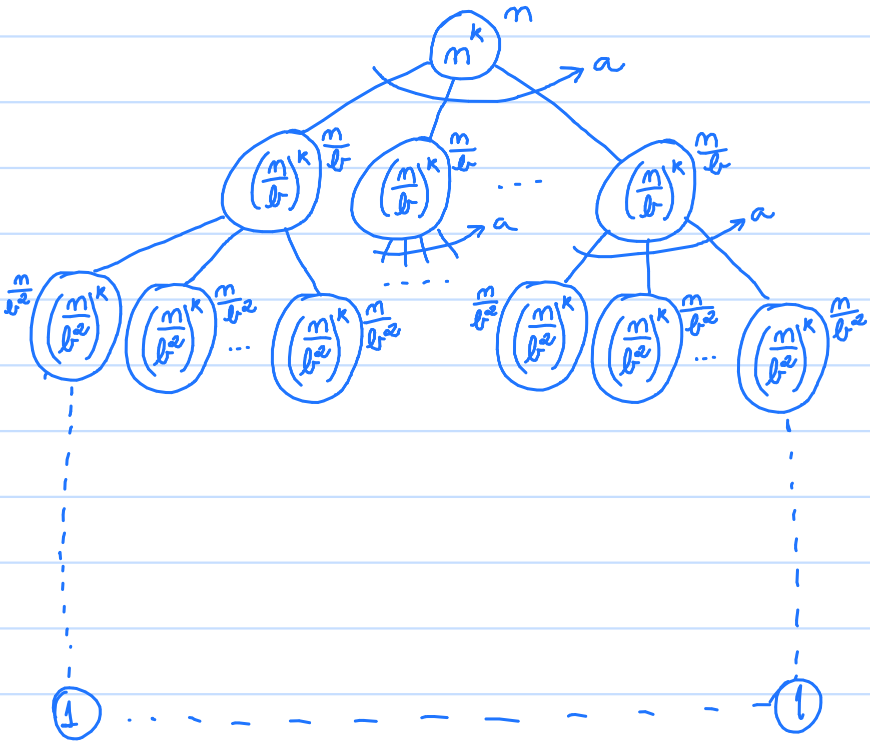
$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot (n-i) = n + (n-1) + \cdots + (n-(n-1)) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Solução de Recorrências: Método mestre

→ Faz uso do Teorema Mestre para resolver recorrências do tipo

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^k)$$

com $a \geq 1$, $b > 1$ e $k \geq 0$ constantes.



$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i \cdot \left(\frac{n}{b^i}\right)^k = n^k \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^j$$

TEOREMA MESTRE (versão simplificada): Sejam $a \geq 1$, $b > 1$ e $k > 0$ constantes. Para $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + \Theta(n^k)$ vale que

(1) se $a > b^k$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) se $a = b^k$, então $T(n) = \Theta(n^k \log n)$

(3) se $a < b^k$, então $T(n) = \Theta(n^k)$

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ $\quad a=2, b=2, k=1 \quad a = 2 = b^k = 2^1$

$\therefore T(n) = \Theta(n \log n)$

$T(n) = 4T(\frac{n}{10}) + 5\sqrt{n}$ $\quad a=4, b=10, k=\frac{1}{2} \quad \underset{\sqrt{16}}{a = 4} > b^k = \sqrt{10}$

$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_{10} 4})$

$T(n) = 5T(\frac{3n}{4}) + 10n^3$ $\quad a=5, b=\frac{4}{3}, k=3 \quad a = 5 > b^k = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27}$

$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_{4/3} 5})$ $\quad (2 \cdot 27 = 54)$

$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \log n$

$T'(n) = 3T'(\frac{n}{4}) + n \rightarrow a=3, b=4, k=1 \quad a = 3 < b^k = 4$

$T''(n) = 3T''(\frac{n}{4}) + n^2 \rightarrow a=3, b=4, k=2 \quad a = 3 < b^k = 4^2 = 16$

$\therefore T'(n)$ é $\Theta(n)$ e $T''(n)$ é $\Theta(n^2)$

Como $T'(n) \leq T(n) \leq T''(n)$, $T(n)$ é $\Omega(n)$ e $O(n^2)$

$T(n) = 2T(n-1) + \sqrt{n}$ $\quad \times$

$T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + \sqrt{n}$

$T'(n) = T'(\frac{n}{3}) + T'(\frac{n}{3}) + \sqrt{n} = 2T'(\frac{n}{3}) + \sqrt{n}$

$a=2, b=3, k=\frac{1}{2} \quad a = 2 > b^k = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

$T''(n) = T''(\frac{2n}{3}) + T''(\frac{2n}{3}) + \sqrt{n} = 2T''(\frac{2n}{3}) + \sqrt{n}$

$a=2, b=\frac{3}{2}, k=\frac{1}{2} \quad a = 2 > b^k = (\frac{3}{2})^{1/2} = \sqrt{1{,}5}$

$\therefore T'(n)$ é $\Theta(n^{\log_3 2})$ e $T''(n)$ é $\Theta(n^{\log_{3/2} 2})$

Como $T'(n) \leq T(n) \leq T''(n)$, $T(n)$ é $\Omega(n^{\log_3 2})$ e $O(n^{\log_{3/2} 2})$

- $\log_3 2 = x \qquad (3^x = 2)$

$\log_3 2 > \log_3 1 = 0 \qquad \log_3 2 < \log_3 3 = 1$

$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$

$3^x = 2 \qquad 3^0 < 3^x < 3^1 \qquad 0 < x < 1$

$3^{2x} = 4 \qquad 3^1 < 3^{2x} < 3^2 \qquad 1 < 2x < 2 \qquad 0{,}5 = \frac{1}{2} < x < 1$

$3^{3x} = 8 \qquad 3^1 < 3^{3x} < 3^2 \qquad 1 < 3x < 2 \qquad 0{,}33 = \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} = 0{,}66$

$3^{4x} = 16 \qquad 3^2 < 3^{4x} < 3^3 \qquad 2 < 4x < 3 \qquad 0{,}5 = \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\boxed{0{,}5 = \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \approx 0{,}66}$

- $\log_{3/2} 2 = x \qquad \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2\right)$

$\frac{3}{2} = 1{,}5$
$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}\dots$
$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3{,}\dots$
$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = 5{,}\dots$

$\log_{3/2} 2 > \log_{3/2} 3/2 = 1 \qquad \log_{3/2} 2 < \log_{3/2} 9/4 = 2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^1 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad 1 < x < 2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 4 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{2}\right)^4 \qquad 3 < 2x < 4 \qquad 1{,}5 = \frac{3}{2} < x < 2$

$\boxed{1{,}5 < x < 2}$

- $\log_{4/3} 5 = x \qquad \left(\left(\frac{4}{3}\right)^x = 5\right)$

$\left(\frac{4}{3}\right) = 1{,}3\dots$
$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1{,}7\dots$
$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}3\dots$
$\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3{,}\dots$
$\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243} = 4{,}\dots$
$\left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{4096}{729} = 5{,}\dots$

$\log_{4/3} 5 > \log_{4/3} 4/3 = 1$

$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 5 \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^5 < \left(\frac{4}{3}\right)^x < \left(\frac{4}{3}\right)^6 \qquad 5 < x < 6$

$$\log_{4/3} 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4 - \log_2 3} < \frac{3}{2 - x} \leqslant \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$\log_2 3 = x \Rightarrow 2^x = 3 \qquad 8 < 9 < 16 \qquad 1 < x < 2$

$2^{4x} = 9 \qquad 2^3 < 2^{2x} < 2^4 \qquad \frac{3}{2} < x < 2$

Teorema mestre - demonstração

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + n^k \qquad\qquad T(n) = n^k \sum_{j=0}^{\log_b^n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^j$$

1) Se $a > b^k$, então $\left(\frac{a}{b^k}\right) > 1$ e

$$T(n) = n^k \sum_{j=0}^{\log_b^n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^j = n^k \left(\frac{\left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n + 1} - 1}{\left(\frac{a}{b^k}\right) - 1} \right) = c' n^k \left(\left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n + 1} - 1 \right)$$

$$= c' n^k \left(\left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n} \cdot \left(\frac{a}{b^k}\right) \right) - c' n^k = c'' n^k \left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n} - c' n^k$$

$$= c'' n^k n^{\log_b (a/b^k)} - c' n^k = c'' n^{k + \log_b^a - \log_b^{b^k}} - c' n^k$$

$$= c'' n^{\log_b^a} - c' n^k = \Theta\left(n^{\log_b^a}\right)$$

2) Se $a = b^k$, então $\left(\frac{a}{b^k}\right) = 1$ e

$$T(n) = n^k \sum_{j=0}^{\log_b^n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^j = n^k \sum_{j=0}^{\log_b^n} 1^j = n^k \left(\log_b^n + 1\right)$$

$$= n^k \log_b n + n^k = \Theta\left(n^k \log n\right)$$

3) Se $a < b^k$, então $\left(\frac{a}{b^k}\right) < 1$ e

$$T(n) = n^k \sum_{j=0}^{\log_b^n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^j = n^k \left(\frac{1 - \left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n + 1}}{1 - \left(\frac{a}{b^k}\right)} \right) = c' n^k \left(1 - \left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n + 1} \right)$$

$$= c' n^k - c' n^k \left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n} \left(\frac{a}{b^k}\right) = c' n^k - c'' n^k n^{\log_b (a/b^k)}$$

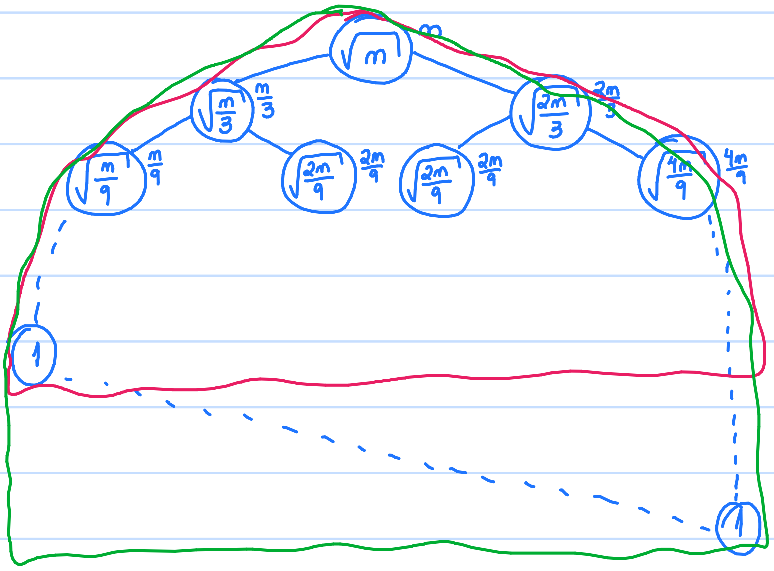
$$= c' n^k - c'' n^{k + \log_b^a - \log_b^{b^k}} = c' n^k - c'' n^{\log_b^a} = \Theta(n^k)$$

CQD

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \sqrt{n}$$

$$T'(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n} \rightarrow \Theta\left(n^{\log_3 2}\right)$$

$$T''(n) = 2T''\left(\frac{2n}{3}\right) + \sqrt{n} \rightarrow \Theta\left(n^{\log_{3/2} 2}\right)$$



$T(n)$ é $\Omega\left(n^{\log_3 2}\right)$ e é $O\left(n^{\log_{3/2} 2}\right)$

Chute: $T(n)$ é $\Theta(n)$

Vamos provar por indução em n que $c_1 \cdot n \leq T(n) \leq c_2 n + d\sqrt{n}$

BASE: $n = 1$. $T(1) = 1$, $c_1 \cdot 1 = c_1$ e $c_2 \cdot 1 - d = c_2 + d$.

Para o caso base valer, $c_1 \leq 1$ e $1 \leq c_2 + d$.

Seja $n \geq 2$ e sup. $c_1 \cdot k \leq T(k) \leq c_2 \cdot k + d\sqrt{k}$ $\forall\, 1 \leq k < n$.

Como $\frac{n}{3} < n$ e $\frac{2n}{3} < n$ para $n \geq 2$, por HI temos

$$c_1 \cdot \left(\frac{n}{3}\right) \leq T\left(\frac{n}{3}\right) \leq c_2\left(\frac{n}{3}\right) + d\sqrt{\frac{n}{3}} \qquad (1)$$

$$c_1 \cdot \left(\frac{2n}{3}\right) \leq T\left(\frac{2n}{3}\right) \leq c_2 \cdot \left(\frac{2n}{3}\right) + d\sqrt{\frac{2n}{3}} \qquad (2)$$

Então

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \sqrt{n} \geq c_1\left(\frac{n}{3}\right) + c_1\left(\frac{2n}{3}\right) + \sqrt{n} = c_1 \cdot n + \sqrt{n} \geq c_1 \cdot n$$

e

$$\begin{aligned} T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \sqrt{n} &\leq c_2\left(\frac{n}{3}\right) + d\sqrt{\frac{n}{3}} + c_2\left(\frac{2n}{3}\right) + d\sqrt{\frac{2n}{3}} + \sqrt{n} \\ &= c_2 \cdot n + d\sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{n} + d\sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{n} + \sqrt{n} \\ &= c_2 n + \left(d\sqrt{\tfrac{1}{3}} + d\sqrt{\tfrac{2}{3}} + 1\right)\sqrt{n} \\ &\leq c_2 n + d\sqrt{n} \end{aligned}$$

onde a última inequação vale se $d\sqrt{\frac{1}{3}} + d\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \leq d$, o que vale se $d\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \geq -1$, ou $d \geq -1 / \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Então precisamos que $c_1 \leq 1$, $c_2 + d \geq 1$ e $d \geq -1 / \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Vamos tomar $c_1 = 1$, $d = -1 / \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ e $c_2 = 1 + 1 / \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Com $n_0 = 1$, provamos que $c_1 \cdot n \leq T(n) \leq c_2 n + d\sqrt{n}$

Como $c_2 n + d\sqrt{n} \leq c_2 n$ (pois d é negativo), provamos que $T(n)$ é $\Theta(n)$.