Lista 0: Revisão

1 Indução

1. Mostre que $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{n-1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$.

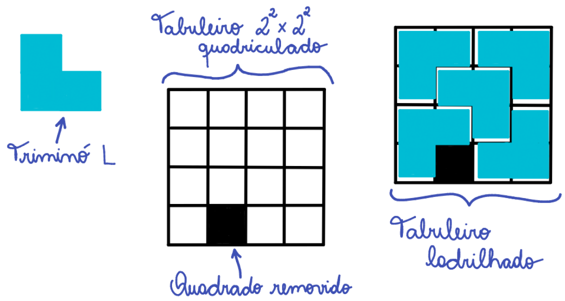
2. Prove que $2^{n+1} < 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

3. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $n^3 - n$ é divisível por 3.

4. Seja A um conjunto qualquer de números inteiros. Prove que todo subconjunto $B \subseteq A$ de tamanho finito e não-vazio tem um elemento mínimo.

5. Denote por F_n o n-ésimo número da sequência de Fibonacci. Definimos $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$. Prove que $F_n \geq 2^{0.5n}$ para todo $n \geq 6$.

6. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$, todo tabuleiro de damas quadriculado de tamanho $2^n \times 2^n$ que tem um quadrado removido pode ser ladrilhado por triminós em forma de "L", conforme a figura a seguir.



7. Prove que a quantidade máxima de nós em uma árvore binária de altura h é $2^{h+1} - 1$.

8. Diga qual é o erro da seguinte "prova" por indução:

2 Programação

1. Nesse exercício, um número inteiro x com n dígitos será representado em um vetor com n posições, uma para cada dígito, de forma invertida. Assim, por exemplo, o número 38549 é representado pelo vetor $A = (9, 4, 5, 5, 8, 3)$.

   Considere o problema de adicionar dois inteiros de n dígitos cada. Perceba que o número resultante da soma pode ter $n + 1$ dígitos.

   Faça um algoritmo que recebe dois vetores A e B que representam dois inteiros e devolve um vetor C que representa a soma dos inteiros recebidos.

2. Qual a árvore de recursão da chamada Imprimir(6)? O que será impresso?

```
Função Imprimir(i)
    Se i > 0 então
        Imprimir(i − 1)
        Para j = 1 até i faça
            imprima '*' na tela
        imprima uma quebra de linha
```

3. Seja S um vetor e i e j dois números inteiros positivos tais que $i \leq j$. Explique o que o algoritmo a seguir faz.

```
Função Catioro(S, i, j)
    Se i ≥ j então
        Devolve sim
    Se S[i] == S[j] então
        Devolve Catioro(S, i + 1, j − 1)
    Devolve não
```

4. Escreva dois algoritmos recursivos diferentes que devolvam o elemento de maior valor contido em um vetor de n elementos.

5. Prove que o seguinte algoritmo troca os valores das variáveis x e y.

```
Função Troca?(x, y)
    x ← x + y
    y ← x − y
    x ← x − y
```

6. Escreva uma função recursiva que calcule a soma dos dígitos de um inteiro estritamente positivo n. A soma dos dígitos de 132, por exemplo, é 6.

7. O que faz a função What a seguir? Considere V como sendo um vetor de tamanho n cujos elementos estão armazenados entre as posições 1 e n.

```
Função What(V, n)
    Se n == 0 então
        Devolve 0
    m ← What(V, n − 1)
    Se V[n] == 0 então
        Devolve m
    V[m + 1] = V[n]
    Devolve m + 1
```

3 Expressões matemáticas (veja mais exercícios desse tipo na Seção 4)

1. Simplifique as expressões:

   (a) $\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{-4}{5}$ (b) $\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y}\right)$ (c) $\dfrac{\dfrac{1}{x+a} - \dfrac{1}{x}}{a}$

2. Verdadeiro ou falso:

   (a) Se $a < b$ e $c < d$, então $c - b < d - a$.

3. Avalie as seguintes expressões, sem utilizar calculadora ou computador:

   (a) $25^{3/2}$ (b) $\log_2 1024$ (c) $\log_4 8$ (d) $\log_2 8^{3.1}$

4. Explique:

   (a) Por que $x^{m+n+p} = x^m x^n x^p$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $m, n, p \in \mathbb{Z}^+$?

   (b) Por que $\log_3 100$ está entre 4 e 5?

   (c) Por que $\log_{2b} y = \dfrac{\log_b y}{1 + \log_b 2}$?

5. Avalie:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=7}^{n} i$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{40} \frac{3}{2^i}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{40} (\log_2 4^k + 1)$

4 Mais sobre expressões matemáticas

1. Simplifique as expressões:

   (a) $y^4(y^2(y^5)^2)^3$ (b) $\dfrac{(x^2)^3y^8}{x^5(y^4)^3}$ (c) $\left(\dfrac{(x^2y^{-5})^{-4}}{(x^5y^{-2})^{-3}}\right)^2$

2. Verdadeiro ou falso:

   (a) Se $a < b$ e $c < d$, então $ac < bd$.

   (b) Se $a < b$ e $b > 0$, então $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$.

3. Avalie as seguintes expressões, sem utilizar calculadora ou computador:

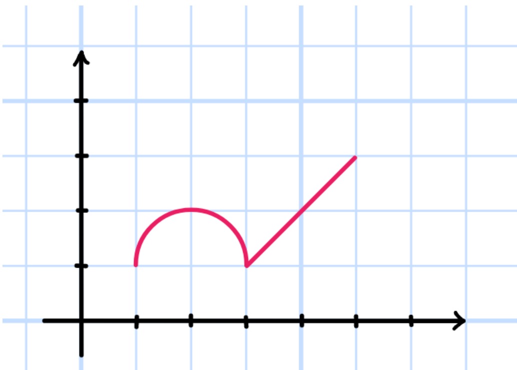
   (a) $32^{-4/5}$

   (b) $(-8)^{7/3}$

   (c) $\log_8 2^{6.3}$

   (d) $\log_4 \dfrac{u^2}{\sqrt{v}}$, sabendo que $\log_4 u = 3.2$ e $\log_4 v = 1.3$

4. Seja f uma função cujo domínio é o intervalo $[1, 5]$, cuja imagem é o intervalo $[1, 3]$, e cujo gráfico é dado na figura abaixo.



   Esboce o gráfico das seguintes funções g, também com domínio $[1, 5]$:

   (a) $g(x) = f(x) - 5$

   (b) $g(x) = 2f(x)$

   (c) $g(x) = (f(x))^2$

   A ideia desse exercício é perceber como fica o formato da função quando fazemos alguma operação simples sobre ela.

5. Seja $r(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$, $s(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$ e $t(x) = \dfrac{5}{4x^3+3}$. Escreva:

   (a) $(r+s)(x)$ (b) $(4r-5t)(x)$ (c) $(st)(x)$ (d) $(r(x))^2t(x)$

6. Explique:

   (a) Por que $x^my^mz^m = (xyz)^m$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$?

   (b) Por que $\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^m$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$?

   (c) Por que $\log_{40} 3$ está entre $\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{1}{3}$?

   (d) Por que $2 - \log_{10} x = \log_{10} \dfrac{100}{x}$ para todo $x > 0$?

   (e) Por que $\dfrac{4 + \log_2 x}{3} = \log_2 \sqrt[3]{16x}$ para todo $x > 0$?

7. Se m e n são inteiros positivos tais que $\log_{10} m \approx 41.3$ e $\log_{10} n \approx 12.8$, quantos dígitos mn tem?

8. Avalie:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=10}^{t}(3k-2)$ (b) $\displaystyle\sum_{x=3}^{77}(-5)^x$ (c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\log_{\frac{4}{3}} n-1} 2^j\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^j n}$

9. Por definição, uma função f é dita *de crescimento exponencial* se ela é da forma $f(x) = ab^{kx}$, onde a e k são constantes positivas e $b > 1$. Explique por que toda função f de crescimento exponencial pode ser representada por uma fórmula da forma $f(x) = c \cdot 2^{tx}$, para escolhas apropriadas de c e t.