Prove se $f(n) = O(g(n))$ ou se $f(n) \neq O(g(n))$, e se $f(n) = \Omega(g(n))$ ou se $f(n) \neq \Omega(g(n))$. Somente quando $f(n) = \Theta(g(n))$.

- $f(n) = n \log n$ e $g(n) = 10n \log 10n$

Note que $n \log n \leq 10n \log n \leq 10n \log n + 10n \log 10 = 10n \log(10n) = g(n)$
A sequência de expressões acima vale para qualquer $n \geq 1$.
Então, tomando $c = 1$ e $n_0 = 1$, vale que $n \log n$ é $O(10n \log 10n)$.

Solução 1

Agora veja que

$$
\begin{aligned}
n \log n &= \tfrac{20}{20} n \log n = \tfrac{1}{20}(10n \log n + 10n \log n) \\
&\geq \tfrac{1}{20}(10n \log n + 10n \log 10) \qquad (*) \\
&= \tfrac{1}{20}(10n \log 10n)
\end{aligned}
$$

onde $(*)$ vale se $n \geq 10$.
Então, tomando $c = \frac{1}{20}$ e $n_0 = 10$, vale que $n \log n$ é $\Omega(10n \log 10n)$.

Com esses dois resultados, vale então que $n \log n$ é $\Theta(10n \log 10n)$.
CQD

Para que $n \log n$ seja $O(10n \log 10n)$, devem existir constantes c e n_0 tais que

$$n \log n \leq c \cdot 10n \log 10n \quad \forall n \geq n_0$$

Se a expressão acima vale, também deve valer que

$$c \geq \frac{n \log n}{10n \log 10n} = \frac{n \log n}{10n \log n + 10n \log 10} \qquad \forall n \geq n_0$$

Agora veja que quando $n = 1$, $\frac{n \log n}{10n \log n + 10n \log 10} = 0$.
Quando $n = 2$, a expressão vale $\frac{2}{20 + 20 \cdot \log 10} > 0$
mas $\lim_{n \to \infty} \frac{n \log n}{10n \log n + 10n \log 10} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{10 + \frac{10 \log 10}{n \log n}} = \frac{1}{10}$.
Então de fato existe uma constante c que tenha valor sempre maior do que $\frac{n \log n}{10n \log n + 10n \log 10}$.
Logo, $n \log n$ é $O(10n \log 10n)$.

Começo de uma Solução 2

Prove se $f(n) = O(g(n))$ ou se $f(n) \neq O(g(n))$, e se $f(n) = \Omega(g(n))$ ou se $f(n) \neq \Omega(g(n))$. Somente quando $f(n) = \Theta(g(n))$.

- $f(n) = 3^n$ e $g(n) = 2^n$

Suponha que existem constantes c e n_0 para as quais

$$3^n \leq c \cdot 2^n \quad \forall\, n \geq n_0$$

Isolando o c, temos

$$c \geq \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \forall\, n \geq n_0$$

mas $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ cresce indefinidamente conforme n cresce, de forma que é impossível que c seja constante e sempre maior.
Logo, 3^n não é $O(2^n)$.

Por outro lado, claramente $3^n \geq 2^n$ para qualquer $n \geq 1$, de forma que tomando $c = 1$ e $n_0 = 1$, temos que 3^n é $\Omega(2^n)$.
CQD

ENTENDA o que esse resultado está dizendo!

|| Nada é tão ruim que não possa piorar :)
|| 2^n é exponencial e péssimo, mas 3^n é ainda pior!

Prove se $f(n) = O(g(n))$ ou se $f(n) \neq O(g(n))$, e se $f(n) = \Omega(g(n))$ ou se $f(n) \neq \Omega(g(n))$. Somente quando $f(n) = \Theta(g(n))$.

- $f(n) = \log n!$ e $g(n) = n \log n$

Por definição, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$. Como todos os termos são $\leq n$, vale que

$$n! \leq n^n \qquad (*)$$

Como metade dos termos são $\geq \frac{n}{2}$, temos que

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \qquad (**)$$

Tomando log na expressão $(*)$, temos que

$$\log(n!) \leq \log(n^n) = n \log n$$

Assim, com $c = 1$ e $n_0 = 1$, vale que $\log(n!)$ é $O(n \log n)$

Tomando log na expressão $(**)$, temos que

$$\begin{aligned}\log(n!) \geq \log\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\right) &= \frac{n}{2}\log\left(\frac{n}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}n(\log n - \log 2)\\ &= \frac{1}{2}n\log n - \frac{1}{2}n\log 2\\ &\geq \frac{1}{2}n\log n - \frac{1}{4}n\log 2 \qquad (***)\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)n\log n = \frac{1}{4}n\log n\end{aligned}$$

onde $(***)$ vale sempre que $\log n \geq 2$ (ou $n \geq 4$).

Assim, com $c = \frac{1}{4}$ e $n_0 = 4$, vale que $\log(n!)$ é $\Omega(n \log n)$.

Logo, $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

CQD

ENTENDA o que esse resultado está no dizendo!

$\boxed{n!}$ é uma função horrível, que cresce mais rápido do que funções exponenciais.
(menor do que n^n, mas maior do que $\left(\frac{n}{e}\right)^n e$)
Porém, $\log(n!)$ não é!
$\log(n!)$, pelo resultado acima, tem a mesma ordem de crescimento de $n \log n$ (que é $O(n^2)$, aliás).

Prove se $f(n) = O(g(n))$ ou se $f(n) \neq O(g(n))$, e se $f(n) = \Omega(g(n))$ ou se $f(n) \neq \Omega(g(n))$. Somente quando $f(n) = \Theta(g(n))$.

- $f(n) = n^{0,01}$ e $g(n) = \log^2 n$

Primeiro observe a seguinte tabela:

n	$n^{0,01}$	$\log^2 n$
1	1	1
16	$\approx 1,0281$	16
2^{100}	2	10000

Ela pode nos levar à conclusão que $\log^2 n$ é maior do que $n^{0,01}$, mas isso está errado!

Quando n ultrapassa aproximadamente $2,6149 \cdot 10^{669}$, $n^{0,01}$ é maior do que $\log^2 n$ e isso não muda mais.

Suponha que existem constantes c e n_0 para as quais

$$n^{0,01} \leq c \cdot \log^2 n \quad \forall n \geq n_0$$

Isolando c, temos $c \geq n^{0,01} / \log^2 n$.

Mas note que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{0,01}}{\log^2 n} \overset{\star}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{0,01 \cdot n^{-0,99}}{2 \cdot \log n \cdot \frac{1}{n \ln 2}} = \lim_{n\to\infty} 0,005 \ln 2 \cdot \frac{n^{0.01}}{\log n}$$

$$\overset{\star}{=} \lim_{n\to\infty} 0,005 \ln 2 \cdot \frac{0.01\, n^{-0,99}}{\frac{1}{n \ln 2}} = \lim_{n\to\infty} 0,00005 \ln^2 2 \cdot n^{0,01} = \infty,$$

onde em $\star$ foi aplicada a regra de L'Hôpital e $\ln$ é o logaritmo na base e.

Como $n^{0,01}/\log^2 n$ tende a ∞ conforme n cresce, não é possível existir c constante que seja sempre maior do que essa expressão.

Logo, $n^{0,01}$ não é $O(\log^2 n)$.

Agora veja que para que $n^{0,01} \geq c \cdot \log^2 n \ \forall n \geq n_0$ para algum c e n_0, basta que $c \leq n^{0,01}/\log^2 n \ \forall n \geq n_0$.

Quando $n = 2$, $n^{0,01}/\log^2 n = 2^{0,01}$ e $\lim_{n\to\infty} n^{0,01}/\log^2 n = \infty$, então de fato existe uma constante c que seja sempre menor do que $n^{0,01}/\log^2 n$ para $n \geq 2$ $(= n_0)$.

CQD

ENTENDA o que esse resultado está nos dizendo!

Por menor que seja o expoente do n e por maior que seja o expoente no log, n^k sempre é maior do que $\log^t n$.

Prove que $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$ é $O(1)$.

Seja $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$. Queremos provar que $S \leq c \cdot 1$ para alguma constante c, qualquer que seja o $n \geq 1$.

Como $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}$, então $\frac{S}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}$.

Então

$$S - \frac{S}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}\right)$$

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

Assim,

$$S = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i - 2 \cdot \frac{n}{2^{n+1}} \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$= 2\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 4$$

Então tomando $c = 4$ e $n_0 = 1$, temos que $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$ é $O(1)$. CQD