Análise de Algoritmos e Estruturas de Dados
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer

Lista 6: Complexidade computacional

ATENÇÃO!
A definição dos problemas citados nas questões está na página seguinte.

1. Defina formalmente: algoritmo eficiente, problema de decisão, problema de otimização, certificado positivo, algoritmo verificador, classes P, NP, NP-completo e NP-difícil.

2. Defina formalmente a classe NP e a classe NP-completo. Informalmente, o que significa dizer que um problema é NP-completo?

3. É verdade que se reduzirmos um problema em P para um problema em NP, então P = NP? Justifique.

4. Seja A um problema NP-completo. Seja B um outro problema qualquer. Diga tudo que podemos concluir ao reduzir A para B. Diga tudo que podemos concluir ao reduzir B para A.

5. Mostre que o problema SAT está em NP.

6. Seja G um grafo. Uma *coloração* de G é uma função $c\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, para algum inteiro $k \geq 1$, tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$. Ela recebe esse nome pois pode ser visualizada como uma atribuição de cores aos vértices (cada inteiro entre 1 e k é uma cor). Uma *3-coloração* é uma coloração em que $k = 3$. Considere o problema da 3-coloração: dado um grafo G, determinar se ele tem ou não uma 3-coloração. Mostre que o problema da 3-coloração está em NP.

7. Dado um grafo G com pesos nas arestas, prove que determinar se existe uma árvore geradora com peso no máximo k está em NP.

8. O problema CAMk consiste em, dado um grafo G, uma função $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$ e um número real k, decidir se existe um caminho em G de custo total no máximo k. O problema CAM consiste em, dado um grafo G, uma função $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$ e um vértice s, encontrar o menor caminho entre s e qualquer outro $v \in V(G)$. Mostre como reduzir o problema CAMk para o problema CAM. O que pode ser concluído sobre CAMk?

9. Mostre que se o TSPk pode ser resolvido em tempo polinomial, então o TSP também pode.

10. Mostre que o problema Set Cover é NP-completo usando o problema Vertex Cover, que é NP-completo.

11. Mostre que o problema Independent Set é NP-completo usando o problema Vertex Cover, que é NP-completo.

12. Sejam A e B dois problemas na classe P, C um problema na classe NP e D e E dois problemas na classe NP-completo. Verdadeiro ou falso: se existe algoritmo com tempo $\Theta(n^2)$ que resolve B e A pode ser reduzido para B em tempo polinomial, então não existe algoritmo com tempo $\Theta(n)$ que resolve A. Justifique.

13. Mostre como utilizar **qualquer algoritmo** para o problema do Alinhamento de Sequências para resolver o problema da Subsequência Comum mais Longa (LCS). No LCS são dadas duas sequências A e B de tamanhos diferentes sobre um mesmo alfabeto, e queremos encontrar o tamanho da subsequência mais longa que é comum a ambas. Uma *subsequência* consiste de caracteres que aparecem na mesma ordem relativa, mas não necessariamente de forma contínua. Por exemplo, a LCS entre $A = abcdgh$ e $B = aedfhr$ é adh e a LCS entre $A = aggtab$ e $B = gxtxayb$ é $gtab$.

Problema: TSP
Entrada: grafo G, função c de custo nas arestas.
Objetivo: ciclo hamiltoniano (que passa por todos os vértices) cuja soma dos custos das arestas é mínima.

Problema: TSPk
Entrada: grafo G, função c de custo nas arestas, valor k.
Decisão: existe ciclo hamiltoniano cuja soma dos custos das arestas menor ou igual a k?

Problema: Set Cover
Entrada: conjunto $T = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de n elementos, coleção $S_1,\ldots,S_m$ de subconjuntos de T ($S_i \subseteq T$ para todo i), inteiro k.
Decisão: existem no máximo k conjuntos S_i tal que a união deles é T?

Problema: Vertex Cover
Entrada: grafo G e inteiro ℓ.
Decisão: existe subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| \leq \ell$ e para toda aresta $uv \in E(G)$ vale que pelo menos um dentre u e v estão em S?

Problema: Independent Set
Entrada: grafo G e inteiro z.
Decisão: existe subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| \geq z$ e para todo par $u, v \in S$ vale que $uv \notin E(G)$?

Problema: SAT
Entrada: uma fórmula ϕ que é a conjunção de m cláusulas C_i, com cada cláusula sendo uma disjunção de literais, e cada literal sendo uma variável ou sua negação, tirada do conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de variáveis. Em outras palavras, $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ e $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \cdots \vee \ell_{k_i}$, para $1 \leq i \leq m$, e $\ell_j \in \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$, para $1 \leq j \leq k_i$.

1 Questões retiradas do Enade e Poscomp

QUESTÃO 22

Considere o processo de fabricação de um produto siderúrgico que necessita passar por *n* tratamentos térmicos e químicos para ficar pronto. Cada uma das *n* etapas de tratamento é realizada uma única vez na mesma caldeira. Além do custo próprio de cada etapa do tratamento, existe o custo de se passar de uma etapa para outra, uma vez que, dependendo da sequência escolhida, pode ser necessário alterar a temperatura da caldeira e limpá-la para evitar a reação entre os produtos químicos utilizados. Assuma que o processo de fabricação inicia e termina com a caldeira limpa. Deseja-se projetar um algoritmo para indicar a sequência de tratamentos que possibilite fabricar o produto com o menor custo total. Nessa situação, conclui-se que

(A) a solução do problema é obtida em tempo de ordem $O(nlogn)$, utilizando-se um algoritmo ótimo de ordenação.

(B) uma heurística para a solução do problema de coloração de grafos solucionará o problema em tempo polinomial.

(C) o problema se reduz a encontrar a árvore geradora mínima para o conjunto de etapas do processo, requerendo tempo de ordem polinomial para ser solucionado.

(D) a utilização do algoritmo de Dijkstra para se determinar o caminho de custo mínimo entre o estado inicial e o final soluciona o problema em tempo polinomial.

(E) qualquer algoritmo conhecido para a solução do problema descrito possui ordem de complexidade de tempo não-polinomial, uma vez que o problema do caixeiro viajante se reduz a ele.

QUESTÃO 30

Uma fazenda possui um único poço artesiano que deve abastecer *n* bebedouros para o gado. Deseja-se determinar um projeto de ligação entre esses *n+1* pontos através de encanamentos com a menor extensão total. Um algoritmo proposto para a solução do problema executa os seguintes passos:

1. Crie *n+1* conjuntos unitários, cada um contendo um dos pontos a serem ligados entre si e insira esses conjuntos em um conjunto *C*.
2. Crie um conjunto *D* contendo um registro para cada combinação possível de dois pontos distintos a serem ligados. Cada registro deve conter os campos *ci* , *cj* e *d*, em que *ci* e *cj* são os dois pontos a serem ligados e *d* é a distância entre eles.
3. Enquanto *D* não estiver vazio faça:

   3.1.Remova o registro de *D* com o menor valor de distância *d*.

   3.2.Se os valores de c_i e c_j do registro removido pertencerem a conjuntos distintos de *C*, então:

      3.2.1.Substitua estes dois conjuntos pela união entre eles.

      3.2.2.Guarde o registro removido em um conjunto-solução.

Com base na descrição do problema e do algoritmo proposto, conclui-se que

A) o problema exemplifica a obtenção de uma árvore geradora mínima, portanto está no conjunto *P*.

B) o algoritmo é uma heurística para o Problema do Caixeiro Viajante, logo apresenta complexidade polinomial.

C) o problema descrito é de otimização, logo pertence ao conjunto *NP*–difícil, mas não ao conjunto *NP*–completo.

D) uma alternativa para a solução do problema é usar o algoritmo de Dijkstra para obtenção do caminho mínimo entre dois pontos.

E) o passo de maior custo do algoritmo é a criação do conjunto *D* com as combinações de pontos, apresentando complexidade computacional *O(n!)*.

QUESTÃO 28

Um cientista afirma ter encontrado uma redução polinomial de um problema NP-Completo para um problema pertencente à classe P. Considerando que esta afirmação tem implicações importantes no que diz respeito à complexidade computacional, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

I. A descoberta do cientista implica P = NP.

PORQUE

II. A descoberta do cientista implica na existência de algoritmos polinomiais para todos os problemas NP-Completos.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

(A) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.
(B) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.
(C) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.
(D) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
(E) As asserções I e II são proposições falsas.

QUESTÃO 40 – Considere as seguintes afirmações sobre classes de problemas:

I. O problema de decisão CAM, descrito a seguir, pertence à classe de complexidade P.

CAM (caminho em grafo)
Entrada: uma tripla (G,a,b) em que

- G é um grafo
- a e b são nodos de G

Pergunta: Existe caminho em G iniciando em a e terminando em b?

II. Um problema X pertence à classe de problemas NP-completos quando satisfaz às seguintes condições:

- X pertence à classe NP, e
- todo problema Y da classe NP pode ser reduzido em tempo polinomial a X.

III. Se um problema de decisão X pertence à classe P, então o complemento do problema X (problema com as mesmas instâncias que X, porém com as respectivas respostas invertidas) pertence à classe NP.

Quais estão corretas?

A) Apenas I.
B) Apenas III.
C) Apenas I e II.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.